Faculté de Sciences
Algèbre, Géométrie et Calculs
Janvier–Mai 2022.

Devoir surveillé n° 1

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– Le devoir a un total de 23 points. Les notes $\geqslant 20$ seront considérées comme 20.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations irresponsables vous font perdre la confiance du correcteur : Il faut les éviter à tout prix.
– La bonne compréhension et interprétation des questions fait partie du devoir.
– Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (6 pts) Montrer que les polynômes $f = Y^3 - (1-Y)X^2$ et $g = Y^5 - X^2 + 1$ sont irréductibles dans $\mathbf{C}[X, Y]$.

Correction. Le polynôme f est irréductible dans $\mathbf{C}(Y)[X]$. En effet, à invertible près, il est $X^2 - \dfrac{Y^3}{1-Y}$ et ce denier ne possède pas une racine dans $\mathbf{C}(Y)$. En effet, soient $a, b \in \mathbf{C}[Y]$ premiers entre eux tels que $(a/b)^2 = Y^3/(1-Y)$. Donc $(1-Y)a^2 = Y^3 b^2$. Soit v la valuation $\mathbf{C}(Y) \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ définie par $Y - 1$. Il suit que $2v(a) + 1 = 2v(b)$, ce qui est une contradiction. Le fait que f soit irréductible dans $\mathbf{C}(Y)[X]$ et qu'il soit primitif montre que f est aussi irréductible dans $\mathbf{C}[X, Y]$. Ensuite, g est irréductible dans $\mathbf{C}[X, Y]$ car il s'agit d'un polynôme $X - 1$-Eisenstein. □

Exercice 2. Soient $f, g \in k[X, Y]$ des polynômes non-constants et premiers entre eux. Dans la suite, I désigne l'idéal de $k[X, Y]$ engendré par f et g.

1. (5 pts) On suppose que $f \in k[X]$ et $g \in k[Y]$. Montrer que le k-sous-espace vectoriel I a codimension finie dans $k[X, Y]$. (C'est-à-dire, il existe un sous-espace $E \subset k[X, Y]$ de dimension finie tel que $k[X, Y] = I + E$.)

   Correction. On suppose $d = \deg f$ et $e = \deg g$. Il suit que $\{X^i Y^j \,:\, 1 \leqslant i < d,\ q \leqslant j < e\}$ engendre un complement à I. En effet, soit $X^i Y^j \in k[X, Y]$. On a $X^i = p(X) f(X) + r(X)$ avec $\deg r < d$. Donc $X^i Y^j \equiv r(X) Y^j \mod I$. Le même raisonnement prouve que $Y^j \equiv q(Y) g(Y) + s(Y)$ où $\deg s < e$ et $X^i Y^j \equiv r(X) s(Y) \mod I$. □

2. (4 pts) On ne suppose plus que $f \in k[X]$ et $g \in k[Y]$. Montrer que I est de codimension finie dans $k[X, Y]$.

Correction. Il suffit de noter qu'il existe $p \in I$ qui est non-nul et appartient à $k[X]$, et qu'il existe $q \in k[Y] \backslash \{0\}$ appartenant à I. Donc $(p, q) \subset I$ et un complément pour (p, q) est complément pour I. □

Exercice 3. (8pts) Soit $C = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \ : \ zw = 1 \text{ et } \mathbf{Im}\, z > 0\}$. Vrai ou faux : C est une courbe plane algébrique.

Correction. Faux. Soit f un poly sans facteur carré tel que $C = \mathscr{Z}(f)$. Soit $p = XY - 1$. On voit que p est premier. En effet, $p \in \mathbf{C}(X)[Y]$ est linéaire, donc irréductible. Puis, p est primitif et on voit que p est aussi irréductible dans $\mathbf{C}[X, Y]$. Ensuite, $\mathscr{Z}(f) \cap \mathscr{Z}(p)$ est infini : par exemple $(n, 1/n) \in C \cap \mathscr{Z}(p)$. Il suit que $p \mid f$ et donc $\mathscr{Z}(p) \subset C$. Or, mais il est clair que $(i, -i) \in \mathscr{Z}(p) \backslash C$. □