Faculté de Sciences
Algèbre, Géométrie et Calculs
Janvier–Mai 2022.

Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– Le devoir a un total de 24 points. Les notes $\geqslant 20$ seront considérées comme 20.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations irresponsables vous font perdre la confiance du correcteur : Il faut les éviter à tout prix.
– La bonne compréhension et interprétation des questions fait partie du devoir.
– Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (6 pts) Soit $C \subset \mathbf{C}^2$ une courbe plane irréductible, c'est-à-dire, $C = \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(f)$ avec f irréductible et non-constant. Montrer que si D et E sont courbes planes telles que $C = D \cup E$, alors soit $C \subset D$, soit $C \subset E$.

Correction. $D = \mathcal{Z}(g)$ et $E = \mathcal{Z}(h)$. On sait que $\mathcal{Z}(f)$ est infini. Donc $\#\mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(h) = \infty$ ou $\#\mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(g) = \infty$. On suppose $\#\mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(g) = \infty$. Mais on sait que si f et g sont premiers entre eux, alors $\#\mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(g) < \infty$. Donc f et g ne sont pas premiers entre eux. Donc $f \mid g \Rightarrow \mathcal{Z}(f) \subset \mathcal{Z}(g)$. Il est également possible de noter que $D \cup E = \mathcal{Z}(gh)$ et appliquer le Lemme de Study disant que $f \mid gh$. Par contre, on ne peut pas appliquer directement l'égalité $f = gh$, puisque il n'est pas donné que gh est générateur du idéal $\mathcal{I}(C)$. □

Exercice 2. Soit $f \in \mathbf{C}[X, Y]$ *irréductible* de degré $d \geqslant 2$ et C la courbe $\mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(f)$. Soit $P \in C$ un point de multiplicité m.

(1) (4 pts) Montrer que $d - 1 \geqslant m$.

Correction. Soit $\alpha : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ une transfo. affine telle que $\alpha(O) = P$. On sait $\mathrm{mult}_P(C) = \mathrm{mult}_O(\alpha^{-1}(C))$. On sait que $\alpha^{-1}C = \mathcal{Z}(\alpha^{\#}(f))$. On écrit $\alpha^{\#}(f) = g_m + \cdots + g_d$ avec g_i homog. de deg. i. On note que, par hypothèse, g est irréductible, parce que $\alpha^{\#} : \mathbf{C}[X, Y] \to \mathbf{C}[X, Y]$ est un isomorphisme. Si $m \geqslant d$, alors $\alpha^{\#}(f) = g_d$. On écrit $g_d = c_{d0}X^d + \cdots + c_{0d}Y^d$. Si $c_{0d} = 0$, alors $X \mid g_d = g$ et g n'est pas irréductible, une contradiction. Donc $c_{0d} \neq 0$. On déduit que

$$\begin{aligned} g_d &= c_{0d}X^d\left((Y/X)^d \cdots + c_{d0}/c_{0d}\right) \\ &= c_{0d}X^d \prod_{j=1}^{d}(Y/X - r_j) \\ &= c_{0d}\prod_{j=1}^{d}(Y - r_jX). \end{aligned}$$

Il suit que $g = g_d$ n'est pas irréductible. Donc f n'est pas irréductible non-plus car $\alpha^\# : \mathbf{C}[X,Y] \to \mathbf{C}[X,Y]$ est un automorphisme. Contradiction.

□

(2) (4 pts) On suppose $P = O$. Montrer que, pour chaque droite L passant par O, l'intersection $C \cap L$ possède au plus $d - m$ points distincts de O.

Correction. Dans ce cas, pour chaque droite $D_\theta = \mathcal{Z}(Y - \theta X)$, les points d'intersection distincts de O sont les couples $(x,y) \in D_\theta$ tels que $x \neq 0$ et $f_m(1,\theta) + \cdots + x^{d-m}f_d(1,\theta) = 0$. Dit autrement, sont les racines de $f_m(1,\theta) + \cdots + f_d(1,\theta)X^{d-m}$. Or, le polynôme

$$\frac{f(X,\theta X)}{X^m} = f_m(1,\theta) + \cdots + f_d(1,\theta)X^{d-m} \in \mathbf{C}[X]$$

ne peut pas être le polynôme nul. En effet, en écrivant

$$f_m(X,Y) = c_{m0}X^m + \cdots + c_{0m}Y^m,$$

on a

$$f_m(1,\theta) = c_{m0}\theta^m + \cdots + c_{0m},$$

et si $f_m(1,\theta) = 0$ pour tout $\theta \Rightarrow f_m(1,X) = 0$ et donc $c_{m0} = \cdots = c_{0m} = 0$ et ceci est exclu. Donc $\dfrac{f(X,\theta X)}{X^m} \neq 0$ et un tel polynôme possède au plus $d - m$ racines. Pour la droite D_∞, les points d'intersection (ceux différents de $(0,0)$) sont $(0,y)$ avec $y \neq 0$ une racine de $f_m(0,1) + \cdots + f_d(0,1)Y^{d-m}$. En écrivant

$$f_\ell = c_{\ell 0}X^\ell + \cdots + c_{0\ell}Y^\ell$$

on voit que $f_\ell(0,1) = 0$ force $c_{0\ell} = 0$ et donc $X \mid f_\ell \Rightarrow$ si $f_m(0,1) = \cdots f_d(0,1) = 0$, alors $X \mid f_m + \cdots + f_d = f$. Il suit que $f_m(0,1) + \cdots + f_d(0,1)Y^{d-m}$ n'est pas le polynôme 0 et donc ne peut pas avoir plus de $d - m$ solutions. □

Exercice 3. Soient $a(t), b(t), v(t)$ et $w(t)$ des polynômes complexes ; on suppose de plus que $b \neq 0$ et $w \neq 0$. Soient $\varphi = \dfrac{a}{b}$ et $\psi = \dfrac{v}{w}$ des éléments de $\mathbf{C}(t)$.

(1) (3 pts) Déterminer $f \in \mathbf{C}[t,x] \smallsetminus \{0\}$ et $g \in \mathbf{C}[t,y] \smallsetminus \{0\}$ tels que $f(t,\varphi) = 0$ et $g(t,\psi) = 0$.

Correction. On définit $f = xb(t) - a(t)$ et $g = yw(t) - v(t)$. Cette question est très simple et le nombre de points élevé montre qu'il faut être prudent, parce que tout le reste dépend de une réponse intelligente. $\square$

(2) (3 pts) À l'aide d'un résultant, déterminer un $R \in \mathbf{C}[x,y]$ tel que $R(\varphi,\psi) = 0$.

Correction. On définit $R = \mathrm{res}_t^{d,e}(f,g)$ où $d = \deg_t(f)$ et $e = \deg_t(g)$. Il faut noter qu'on veut éliminer t et donc il est important de prendre le resultant d'un degré conséquent. Donc $R(x,y) = p(t,x,y)f(t,x) + q(t,x,y)g(t,x)$ et donc $R(\varphi,\psi) = 0$. $\square$

(3) (4 pts) Déterminer une courbe algébrique irréductible $C \subset \mathbf{R}^2$ contenant l'image de la fonction α :

$$\alpha : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2 \quad t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$$

Correction. On construit $f = (1+t^2)x - t$ et $g = (1+t^2)y - 1 + t^2$. Le résultant $\mathrm{res}_t^{2,2}(f,g)$ est ainsi

$$\begin{vmatrix} x & -1 & x & 0 \\ 0 & x & -1 & x \\ y+1 & 0 & y-1 & 0 \\ 0 & y+1 & 0 & y-1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & -1 & x \\ 0 & -2 & 0 \\ y+1 & 0 & y-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & x \\ y+1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & y-1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4x^2 + y^2 - 1.$$

$\alpha(\mathbf{R})$ est contenu dans l'ellipse $\mathcal{Z}(4x^2 + y^2 - 1)$. $\square$