Faculté de Sciences
Algèbre, Géométrie et Calculs
Janvier–Mai 2022.

Devoir surveillé n° 3, 29 avril

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– Le devoir a un total de 2 points. Les notes $\geqslant 20$ seront considérées comme 20.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations irresponsables vous font perdre la confiance du correcteur : Il faut les éviter à tout prix.
– La bonne compréhension et interprétation des questions fait partie du devoir.
– Le barème est donné à titre indicatif.

Conventions. On fixe un corps algébriquement clos k. Dans la suite, on ne fera pas de distinction entre une matrice $\alpha \in \mathrm{GL}_3(k)$ et la transformation projective $[\alpha] : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ indcuite par α.

Exercice 1. (6 pts) Soient $f = X^2 - Y^2 - 1$ et $g = X^2 - Y^2 - 4$ et soient C et D les clotures projectives des courbes $\mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(f)$ et $\mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(g)$ respectivement. Déterminer les points d'intersection ainsi que leurs multiplicités.

Correction. On note que si (x, y) est un zéro, alors $x^2 - y^2 = 1$ et $x^2 - y^2 = 4$. Ceci est impossible. Donc les zéros sont sur Ω et sont les zéros de $(X - Y)(X + Y)$. C'est à dire, $(0 : 1 : 1)$ et $(0 : 1 : -1)$. (2pts) Donc les zéros ne sont pas en bonne position. Soit α la transformation projective $(t : x : y) \mapsto (y : x : t)$. Soient $C' = \alpha^{-1}C$ et $D' = \alpha^{-1}D$. Donc $C' \cap D' = \{(1 : 1 : 0), (-1 : 1 : 0)\}$, $C' = \mathcal{Z}(X^2 - T^2 - Y^2)$ et $D' = \mathcal{Z}(X^2 - T^2 - 4Y^2)$. On calcule le résultant. Pour simplifier la tâche, on travaille avec les polynômes $Y^2 + T^2 - X^2$ et $4Y^2 + T^2 - X^2$. (Je ne sais pas vous, mais je n'aime pas trainer des signes négatifs partout.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & T^2 - X^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T^2 - X^2 \\ 4 & 0 & T^2 - X^2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & T^2 - X^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & T^2 - X^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T^2 - X^2 \\ 0 & 0 & -3(T^2 - X^2) & 0 \\ 0 & 4 & 0 & T^2 - X^2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & T^2 - X^2 \\ 0 & -3(T^2 - X^2) & 0 \\ 4 & 0 & T^2 - X^2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & T^2 - X^2 \\ 0 & -3(T^2 - X^2) & 0 \\ 0 & 0 & -3(T^2 - X^2) \end{vmatrix}$$
$$= 9(T^2 - X^2)^2.$$

On voit que res $= 9(T-X)^2(T+X)^2$ et l'unique zéro de $T-X$ sur $\mathbf{P}^1$ est $(1:1)$ tandis que l'unique zéro de $T+X$ sur $\mathbf{P}^1$ est $(1:-1)$. Chaque point a multiplicité 2. Il suit que les points d'intersection de C et D sont $(0:1:1)$ et $(0:1:-1)$, chacun avec multiplicité 2. (4pts) $\square$

Exercice 2. (5pts) Soient L_1, L_2, L_3 et M_1, M_2, M_3 des droites de $\mathbf{P}^2$ telles que $\cap_{i=1}^3 L_i = \cap_{i=1}^3 M_i = \varnothing$. Montrer qu'il existe une transformation projective $\alpha : \mathbf{P}^2 \to \mathbf{P}^2$ telle que $\alpha(M_i) = L_i$.

Correction. Si $E \subset \mathbf{P}^2$, on écrit $\hat{E}$ pour son cône de k^3. Donc $\hat{L}_i$ et $\hat{M}_i$ sont des plans. On doit montrer qu'il existe une α telle que $\alpha(\hat{M}_i) = \hat{L}_i$. On suppose que $\hat{L}_i = \mathrm{Ker}(\ell_i)$ où $\ell_i \in (K^3)^*$ est non-nul. Donc la matrice X formée par les lignes ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 est de rang 3 : autrement, on trouverai une droite $D \subset \hat{L}_i \cap \hat{L}_2 \cap \hat{L}_3$ (3pts). Soient m_1, m_2, m_3 les analogues de ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 pour les M et soit Y la matrice dont les lignes sont les m_i. Soit $X\alpha = Y$; c'est-à-dire $\ell_i\alpha = m_i$. Donc $v \in \ker m_i \iff \alpha(v) \in \ker \ell_i$. Donc $\alpha(\hat{M}_i) = L_i$ (2pts). $\square$

Exercice 3 (Autour de la multiplicité)**.** Répondre aux questions suivantes.

(1) (2 pts) Soient C et D des courbes planes projectives et soit $P \in C \cap D$. Soit $\alpha \in \mathrm{GL}_3(k)$. Montrer que
$$\langle C, D\rangle_P = \langle \alpha(C), \alpha(D)\rangle_{\alpha(P)}.$$

Correction. Soit $\beta \in \mathrm{GL}_3(k)$ telle que $\beta(\alpha C)$ et $\beta(\alpha D)$ soient en b.p. Alors par définition,
$$\langle C, D\rangle_P = \langle \beta\alpha(C), \beta\alpha(D)\rangle_{\beta\alpha(P)}.$$
$\square$

(2) (6 pts) Soient $F \in k[T,X,Y] \smallsetminus k$ homogène, C la courbe plane projective $\mathcal{Z}_k(F)$, L une droite projective, et $P \in L \cap C$. Montrer que si $\langle L, C\rangle_P = 1$, alors le gradient
$$\mathrm{grad}_P(F) = \left(\frac{\partial F}{\partial T}(P), \frac{\partial F}{\partial X}(P), \frac{\partial F}{\partial Y}(P)\right)$$
est non-nul. Indication : Utiliser la question précédente et le fait que
$$\mathrm{grad}_{\alpha^{-1}(P)}(\alpha^{\#}F) = \mathrm{grad}_P(F) \cdot \alpha.$$
pour $\alpha \in \mathrm{GL}_3(k)$. De plus, vous pouvez argumenter de façon géométrique.

Correction. L'idée c'est d'utiliser la question précédente... De plus, pour calculer les multiplicités, on doit éviter la mauvaise position. Or, déjà, il serait bien de travailler avec $Z = (0:0:1) \notin C \cap D$. Pourquoi pas imaginer alors que $\alpha(L) = \mathcal{Z}(Y)$? Qu'est-ce que cela va donner ?

Soit α une transformation projective telle que $\alpha(L) = \mathcal{Z}(Y)$. Ceci est facile en regardant le cône $\hat{L} = k\vec{u} + k\vec{v}$ et donc il nous faut $\alpha\vec{u} = \vec{e}_1$ et $\alpha\vec{v} = \vec{e}_2$. De plus, on peut supposer que $\alpha(P) = (1:0:0)$. (3pts) En vu de la question précédente et de l'indication, on suppose ainsi que $L = \mathcal{Z}(Y)$ et $P = (1 : 0 : 0)$. Dans ce cas, $\operatorname{res}_Y^{1,d}(Y, F) = F_d$, où l'on a écrit $F = F_0 Y^d + \cdots + F_d Y^0$ avec $\deg F_i = i$. Or, le fait que $\langle L, C \rangle_P = 1$ montre que $F_d(T, X) = \lambda X \Phi(T, X)$ où $\Phi(1, 0) \neq 0$. Donc $\partial_X F_d = \lambda \Phi(T, X) + \lambda X \partial_X \Phi$, et $\partial_X F(1, 0, 0) = \lambda \Phi(1, 0)$ (3 pts). $\square$

(3) (6 pts) Soit $f \in k[X, Y] \smallsetminus k$ un polynôme de degré n tel que $C = \mathcal{Z}_k(f)$ passe par l'origine $O = (0, 0)$. Soit $\overline{C}$ la cloture projective de C. Pour chaque $\theta \in k$, soient $D_\theta = \mathcal{Z}_k(Y - \theta X)$ la droite de pente θ et $\overline{D}_\theta$ sa cloture projective. Montrer que $\langle D_\theta, C \rangle_O = \langle \overline{D}_\theta, \overline{C} \rangle_O$. (Indication : Dans le cas d'oubli : $\langle D_\theta, C \rangle_O$ est la multiplicité de 0 comme zéro de $f(X, \theta X)$.)

Correction. Clairement, $\overline{D}_\theta = \mathcal{Z}(Y - \theta X)$. On note que $(0 : 0 : 1) \notin \overline{D}_\theta$. De plus, si $(t : x : y) \in \overline{D}_\theta$, alors $y = \theta x$. Donc, si $(t : x : y') \in \overline{D}_\theta$, alors $y' = \theta x$ et $y = y'$. Il suit que $\overline{C}$ et $\overline{D}_\theta$ sont en b.p. On écrit $\tilde{f} = F_0 Y^d + \cdots + F_d Y^0$. On obtient que

$$
\begin{aligned}
\operatorname{res}_Y^{1,d} &= \begin{vmatrix} 1 & -\theta X & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\theta X & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -\theta X \\ F_0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & F_d \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -\theta X & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\theta X & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -\theta X \\ F_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & F_d \end{vmatrix} + F_0 \theta^d X^d \\
&= F_d + \cdots + F_0 \theta^d X^d.
\end{aligned}
$$

Donc $\operatorname{res}(T, X) = F(T, X, \theta X)$ et $\langle \overline{D}_\theta, \overline{C} \rangle_O$ est la multiplicité de $(1 : 0)$, qui est aussi la multiplicité de 0 comme zéro de $F(1, X, \theta X) = f(X, \theta X)$. $\square$