Faculté de Sciences
Algèbre, Géométrie et Calculs
Janvier–Mai 2022.

Feuille d'exercices n° 3

Exercices calculatoires

Exercice 1 (Transformations affines)**.** Soit $\alpha : k^2 \to k^2$ définie par $(x, y) \mapsto (x + y, y)$. Soit $f = (X^2 + Y^2)^2 - (X^2 - Y^2) \in \mathbf{Q}[X, Y]$ et $L = \mathscr{Z}_{\mathbf{Q}}(f)$; il s'agit de la lemniscate (ou au moins sa partie rationnelle).

1) La lemniscate, est-elle irréductible ?
2) Dessiner $M := \alpha^{-1}(L)$.
3) Déterminer la multiplicité de M en O. Pour quelles droites $D_\theta = \mathscr{Z}(Y - \theta X)$, avec $\theta \in \mathbf{Q}$, a-t-on $\langle M, D_\theta \rangle_O = \mathrm{mult}_O(M)$?

Exercice 2. Soit k un corps infini et $f \in k[X, Y]$ un polynôme de. degré $d > 0$. Montrer qu'il existe un $a \in k$ tel que, en écrivant $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, le coefficient du terme Y^d est non-nul. Déterminer un tel a dans le cas $k = \mathbf{Q}$ et $f = X^4 + 2X^2Y^2 - X^2 + Y^2$.

Exercice 3. Soient

$$f = a_{00} + a_{10}X + a_{01}Y + a_{11}XY + a_{20}X^2 + a_{02}Y^2 \in \mathbf{Q}[X, Y]$$

et

$$\ell = rX + sY + t \in \mathbf{Q}[X, Y].$$

Utiliser SAGE pour étudier dans quels cas l'inégalité $\deg(\mathrm{res}_Y^{2,1}(f, \ell)) < 2$ est vraie.

Exercice 4. On étudie la sextique de Cayley est la courbe $C = \mathscr{Z}_{\mathbf{R}}(f)$ où $f = 4(X^2 + Y^2 - X)^3 - 27(X^2 + Y^2)^2$.

1) Dessiner C ; voyez-vous un point singulier autre que $O = (0, 0)$? Lequel ? On le désignera par S.
2) Montrer que O et $S = (-1/2, 0)$ sont les seules singularités de C.
3) Calculer la multiplicité de f au point O et au point S. Pour cela, on utilise l'idéal $I = (x, y)$.

Exercices théoriques

Exercice 5. Soit B un anneau et soit A un sous-anneau de B. On considère la propriété suivante du couple (A, B) :

$$\begin{array}{l} \text{Étant donnés } f, g \in A \text{ tels que } g = \beta f \text{ avec } \beta \in B \\ \text{il existe } \alpha \in A \text{ tel que } g = f\alpha. \end{array} \qquad (\Delta)$$

Montrer que (Δ) est héréditaire : si (A, B) satisfait (Δ), alors $(A[X], B[X])$ satisfait (Δ). Utiliser ceci pour montrer que étant donnés $f, g \in \mathbf{Q}[X, Y]$, alors $f \mid g$ dans $\mathbf{Q}[X, Y]$ si et seulement si $f \mid g$ dans $\mathbf{C}[X, Y]$.

Exercice 6. Soit C une courbe plane et $\alpha : k^2 \to k^2$ une affinité inversible.

1) Montrer que $P \in C$ est un point singulier si et seulement si $\alpha^{-1}(P)$ est un point singulier de $\alpha^{-1}(C)$.

2) Soient C_1 et C_2 deux composantes irréductibles de C. Montrer que chaque point $P \in C_1 \cap C_2$ est singulier.