Faculté de Sciences
Algèbre, Géométrie et Calculs
Janvier–Mai 2022.

Feuille d'exercices n° 7 (Séance SAGE)

Exercice 1. Soit

$$\alpha : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad t \longmapsto \left(\frac{\sqrt{t^2+3}}{\sqrt{1+t+t^2}}, \frac{t-2}{\sqrt[3]{1+t^2}} \right)$$

et $C = \alpha(\mathbf{R})$ la courbe paramétrique associée. Déterminer une équation implicite pour C.

Exercice 2. On étudie la sextique de Cayley est la courbe $C = \mathcal{Z}_{\mathbf{R}}(f)$ où $f = 4(X^2 + Y^2 - X)^3 - 27(X^2+Y^2)^2$.

1) Dessiner C ; voyez-vous un point singulier autre que $O = (0,0)$? Lequel ? On le désignera par S.
2) Montrer que O et $S = (-1/2, 0)$ sont les seules singularités de C.
3) Calculer la multiplicité de f au point O et au point S. Pour cela, on utilisera l'idéal $I = (x, y)$.
4) Déterminer les droites asymptotiques et les points à l'infini.

Exercice 3. Soient $f = (X^2+Y^2)^2 + 4X(X^2+Y^2) - 4Y^2$ et $g = X^2+Y^2-1$. Soient $C := \mathcal{Z}_{\mathbf{R}}(f)$, un cardioïde, et $K := \mathcal{Z}_{\mathbf{R}}(g)$, un cercle. Déterminer les directions asymptotiques et les points à l'infini de C et K. Vérifier que notre résultat concernant le degré du résultant entre f et g et les directions asymptotiques est vrai.