Faculté de Sciences
Algèbre, Géométrie et Calculs
Janvier–Mai 2022.

Feuille d'exercices n° 8

Exercice 1. Soit $\alpha \in \mathrm{GL}_3(k)$. Montrer que $[\alpha]^{-1}(\mathcal{Z}(H)) = \mathcal{Z}(\alpha^{\#}H)$, où $\alpha^{\#} : k[T,X,Y] \to k[T,X,Y]$ est le morphisme défini par

$$\begin{pmatrix} \alpha^{\#}T \\ \alpha^{\#}X \\ \alpha^{\#}Y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} T \\ X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Une droite projective est une courbe projective de la forme $\mathcal{Z}(\ell)$, avec $\ell \in k[T,X,Y]$ homogène de degré 1. Des points de $\mathbf{P}^2$ appartenant à une même droite sont dits colinéaires.

1) Montrer que par deux points $P, Q \in \mathbf{P}^2$, il existe une unique droite les contenant.
2) Soit L une droite projective. Déterminer une bijection $\phi : \mathbf{P}^1 \to L$.
3) Soit $Z = (0:0:1)$. La *projection de centre* Z, $\pi : \mathbf{P}^2 \setminus \{Z\} \to \mathbf{P}^1$, est la fonction $(t:x:y) \mapsto (t:x)$. Montrer que $\pi(P) = \pi(Q)$ si et seulement si Z, P et Q sont colinéaires.

Exercice 3. Soit $\mathcal{A}$ le groupe des transformations affines inversibles $k^2 \to k^2$. Soit $\mathcal{P}$ le groupe de transformations projectives. Montrer que $\mathcal{A}$ est isomorphe au stabilisateur de la droite à l'infini Ω.

Exercice 4. Soient $f = X^2 + Y^2 - 2X$ et $g = Y^2 - X$. Soient C et D les clôtures projectives de $\mathcal{Z}(f)$ et $\mathcal{Z}(g)$ respectivement. Déterminer $C \cap D$ et les multiplicités.