Faculté de Sciences
Algèbre, Géométrie et Calculs
Janvier–Mai 2022.

Feuille d'exercices n° 9

Convention. Dans la suite, k est un corps algébriquement clos et $\mathbf{P}^2$ est l'espace des droites vectorielles de k^3.

Exercice 1. Soient $f = X^2 + Y^2 - 2X$ et $g = Y^2 - X$. Soient C et D les clôtures projectives de $\mathcal{Z}(f)$ et $\mathcal{Z}(g)$ respectivement. Déterminer $C \cap D$ et les multiplicités.

Correction. On a $\widetilde{f} = X^2 + Y^2 - 2TX$ et $\widetilde{g} = Y^2 - TX$. Les points d'intersection sur $(k^2)_0$ peuvent être trouvés à l'aide des résultants de f et g. On obtient que les abscisses des zéros "finis" sont $X = 0$ ou $X = 1$, et $Y = 0$, $Y = 1$ et $Y = -1$. On obtient que $\{P_1, P_2, P_3\} = \{(1:1:1), (1:1:-1), (1:0:0)\} = C \cap D$. Les courbes ne sont pas en bonne position. En effet, $P_1, P_2 \in C \cap D$ sont colinéaires avec $Z = (0:0:1)$.

Soit α la transformation projective $(t:x:y) \mapsto (t:y:x)$; les courbes $[\alpha]^{-1}(C)$ et $[\alpha]^{-1}(D)$ sont définies par $F = X^2 + Y^2 - 2YT$ et $G = X^2 - TY$, qui sont maintenant en bonne position car ses zéros sont $P_1 = (1:1:1), Q_2 = (1:-1:1)$ et $P_3 = (1:0:0)$.

On a $\operatorname{res}_Y^{2,2}(F, G) = X^2(X - T)(X + T)$; le point $P_3 = (1:0:0)$ a multiplicité d'intersection 2 et P_1, Q_2 sont de multiplicité 1. Donc P_1 et P_2 ont multiplicité 1, et P_3 a multiplicité 2.

Un détail important. On note que G est un polynôme de degré 1 en Y, mais que le résultant est fait comme si G était de degré 2 en Y. □

Exercice 2. Soient $f, g \in k[X, Y] \setminus k$ premiers entre eux. Montrer que si k est un sous-corps d'un corps K et si $x, y \in K$ sont tels que $f(x, y) = g(x, y) = 0$, alors $x, y \in k$. Cette propriété, reste-t-elle vrai si on suppose simplement que $f(x, y) = 0$?

Correction. Soient $f = a_0 Y^d + \cdots + a_d$ et $g = b_0 Y^e + \cdots + b_e$ avec $a_0 \neq 0$ et $b_e \neq 0$. Alors x est un zéro de $\operatorname{res}_Y^{d,e}(f, g) \in k[X]$; en effet, ce résultant peut être calculé en regardant f et g comme des polynômes de $K[X, Y]$. Donc $x \in k$, car k est algébriquement clos. De même, soient $f = \alpha_0 X^\delta + \cdots + \alpha_\delta$ et $g = \beta_0 X^\varepsilon + \cdots + \beta_\varepsilon$. Il suit que y est un zéro de $\operatorname{res}_X^{\delta,\varepsilon}(f, g) \in k[Y] \Rightarrow y \in k$.

En général, ceci n'est pas vrai ! Par exemple, on peut prendre $f = X^2 + Y^2 - 1$. Si $\mathcal{K}$ est l'anneau de fractions des fonctions entières, alors $(\sin, \cos) \in \mathcal{K}^2$ est un zéro qui n'appartient pas à $\mathbf{C}$. De façon plus formelle, on peut considérer le corps de fractions de $A = \mathbf{C}[X, Y]/(f)$, K disons. Ceci est l'extension quadratique $\mathbf{C}(x)[\beta]$, avec $\beta = \sqrt{1 + x^2}$. Si x est la classe de X et y est la classe de Y, alors $f(x, y) = 0$. □

Exercice 3. Soit $S \in \mathbf{P}^2$ un ensemble de cinq éléments.

(1) Montrer qu'il existe au moins une conique $C = \mathcal{Z}(F)$ contenant S. Indication : Soit V l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré deux. Quel est sa dimension ?

Correction. L'espace vectoriel V est engendré par $T^2, TX, TY, X^2, XY, Y^2$; il a dimension 6. Si $S = \{P_1, \ldots, P_5\}$, on considère

$$\eta : V \longrightarrow \mathbf{C}^5$$

$$F \longmapsto (F(P_1), \ldots, F(P_5)).$$

Soit $W = \mathrm{Ker}(\eta)$. Clairement, $\dim W \geqslant 1$. Alors il existe $F \neq 0$ dans V tel que $\eta(F) = 0$, i.e. $C \supset S$. □

(2) On admet l'existence d'une deuxième conique $D = \mathcal{Z}(G)$ contenant S. Prouver qi'il existe des droite distinctes L, C_1 et D_1 telles que $C = L \cup C_1$ et $D = L \cup D_1$. En déduire que au moins quatre points de S appartiennent à L.

Correction. Dans ce cas $\dim W \geqslant 2$. Soit D comme plus haut. Comme $\#C \cap D \geqslant 5$ $\Rightarrow$ F et G sont divisibles par un polynôme homogène de degré 1. Soit L la droite correspondante. On obtient $C = L \cup C_1$ et $D = L \cup D_1$, où C_1 et D_1 sont des droites distinctes. Donc, $C \cap D = L \cup (C_1 \cap D_1)$. Par conséquent, L contient $S \smallsetminus (C_1 \cap D_1)$. □