Faculté de Sciences
Algèbre, Géométrie et Calculs
Janvier–Mai 2023.

Devoir surveillé n° 1

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– Le devoir a un total de 24 points, respectivement 21 points, si vous choisissez de traiter la question 2-(2), respectivement 2-(1). Les notes $\geqslant 20$ seront considérées comme 20.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations irresponsables vous font perdre la confiance du correcteur : Il faut les éviter à tout prix.
– La bonne compréhension et interprétation des questions fait partie du devoir.
– Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (6 pts) Montrer que les polynômes $f = Y^3 - (1-Y)X^2$ et $g = Y^5 - X^2 + 1$ sont irréductibles en $\mathbf{C}[X, Y]$.

Correction. Le polynôme f est irréductible dans $\mathbf{C}(Y)[X]$. En effet, à invertible près, il est $X^2 - \dfrac{Y^3}{1-Y}$ et ce denier ne possède pas une racine dans $\mathbf{C}(Y)$. En effet, soient $a, b \in \mathbf{C}[Y]$ premiers entre eux tels que $(a/b)^2 = Y^3/(1-Y)$. Donc $(1-Y)a^2 = Y^3b^2$. Soit v la valuation $\mathbf{C}(Y) \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ définie par $Y - 1$. Il suit que $2v(a) + 1 = 2v(b)$, ce qui est une contradiction. Le fait que f soit irréductible dans $\mathbf{C}(Y)[X]$ et qu'il soit primitif montre que f est aussi irréductible dans $\mathbf{C}[X, Y]$. (4pts) Ensuite, g est irréductible dans $\mathbf{C}[X, Y]$ car il s'agit d'un polynôme $X - 1$-Eisenstein. (2pts) □

Exercice 2. (4pts) Soit $C = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \,:\, w = e^{2i\pi z}\}$. Vrai ou faux : C est une courbe plane algébrique.

Correction. Faux. On suppose $C = \mathcal{Z}(f)$ avec $f \in \mathbf{C}[X, Y]$ de degré strictement positif. On observe que $(n, 1) \in C$ pour chaque $n \in \mathbf{Z}$. Soit $D = \mathcal{Z}(Y - 1)$; on déduit que $D \cap C = \infty$. Donc, il suit que $Y - 1 \mid f$. Donc $C \supset D$, ce qui est faux car $(\frac{1}{2}, 1) \notin C$. □

Exercice 3. Vous devez répondre à *exclusivement une* des questions suivantes.

(1) (3pts) On suppose k algébriquement clos. (En particulier, k n'est pas fini.) Soit $f \in k[X, Y]$ de degré strictement positif. Montrer que $\{(x, y) \,:\, f(x, y) \neq 0\} \neq \varnothing$ est non-vide.

Correction. On suppose que $f(x,y) = 0$ pour tout $x, y \in k^2$. Soit ansi $c \in k$. Il suit que $\mathcal{Z}(X-c) \subset \mathcal{Z}(f)$. Donc $X - c \mid f$. Or, les polynômes $X - c$ sont tous irréductibles. Donc $X - c \mid f$. Ceci est impossible. $\square$

(2) (6pts) On suppose k algébriquement clos. (En particulier, k n'est pas fini.) Soient $f, g \in k[X,Y]$ de degrés strictement positifs. Si l'on désigne par V le sous-ensemble $\{(a,b) \in k^2 \,:\, g(a,b) \neq 0\}$ de k^2, montrer que $\{(x,y) \in V \,:\, f(x,y) \neq 0\} \neq \varnothing$.

Correction. Si $f(a,b) = 0$ pour tout $(a,b) \in V$, alors $\mathcal{Z}(f) \supset V$. Soit D une droite. On sait que $\#D \cap \mathcal{Z}(g) < \infty$, sauf si $D \subset \mathcal{Z}(g)$. Donc, pour chaque D qui n'est pas contenue dans $\mathcal{Z}(g)$, on voit que $\#D \cap V = \infty$. Donc $\#\mathcal{Z}(f) \cap D = \infty$. Donc $D \subset \mathcal{Z}(f)$. $\square$

Exercice 4. Soit k un corps algébriquement clos et $C \subset k^2$ une courbe plane irréductible.

1) (2pts) Soient $\mathcal{I}_C$ l'idéal $\{F \in k[X,Y] \,:\, F(P) = 0, \forall\, P \in C\}$ et A l'anneau $k[X,Y]/\mathcal{I}_C$. Vrai ou faux ? : A est intègre.

Correction. Vrai. En effet, on sait que $C = \mathcal{Z}(f)$ où f est irréductible (1pt), et que $\mathcal{I}_C$ est, dans ce cas, engendré par f. Or, comme f est un élément premier, alors $\mathcal{I}_C$ est premier. (1pt) $\square$

2) (6pts) On suppose que l'origine O appartient à C et que, de plus, il s'agit d'un point singulier. On écrit $\overline{X} = X + \mathcal{I}_C$ et $\overline{Y} = Y + \mathcal{I}_C$; ils sont des éléments de A. Montrer que l'idéal $(\overline{X}, \overline{Y})$ n'est pas principal.

Correction. On suppose que $(\overline{X}, \overline{Y})$ est principal. Alors il existe $g \in k[X,Y]$ tel que $(\overline{g}) = (\overline{X}, \overline{Y})$. On déduit que

$$X = af + bg \tag{$*$}$$

et

$$Y = cf + dg, \tag{$**$}$$

où $a, b, c, d \in k[X,Y]$ (2pts). On regarde ces équations modulo $(X,Y)^2 = (X^2, Y^2, XY)$. Donc

$$\begin{aligned} X &\equiv (b_{00} + b_{10}X + b_{01}Y)(g_{10}X + g_{01}Y) \quad \text{mod } X^2, XY, Y^2 \\ Y &\equiv (d_{00} + d_{10}X + d_{01}Y)(g_{10}X + g_{01}Y) \quad \text{mod } X^2, XY, Y^2. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$X \equiv b_{00}g_{10}X + b_{00}g_{01}Y \tag{$\dagger$}$$

et

$$Y \equiv d_{00}g_{10}X + d_{00}g_{01}Y. \tag{$\ddagger$}$$

De $(\dagger) \Rightarrow b_{00}g_{10} \neq 0$ et $g_{01} = 0$. De $(\ddagger) \Rightarrow d_{00}g_{01} \neq 0$ et $g_{10} = 0$. Absurde. $\square$