Faculté de Sciences
Algèbre, Géométrie et Calculs
Janvier–Mai 2023.

Exercices avec calcul algébrique

Avec SAGE, on peut faire des calculs simples.

Il y a déjà une variable symbolique `x`. Ceci permet de définir des fonctions

```
f(x)=x^2
```

Il y a déjà plusieurs fonctions définies :

```
f(x)=cos(x)
```

et aussi des constantes

```
f(pi)=-1
```

C'est l'anneau symbolique `SR`.

Pour construire des anneaux de polynômes, on travaille ainsi

```
R = PolynomialRing(QQ, 'x')
```

Ou

```
R = PolynomialRing(QQ, 'x,y,z')
```

ou

$R=$ `QQ['x,y,z']`

Il faut maintenant expliquer à SAGE que les variables appartiennent à R en faisant

```
x,y,z=R.gens()
```

Une façon plus directe est ainsi

```
R.<x,y,z>=QQ[]
```

Au lieu de travailler avec $\mathbf{Q}$, on peut travailler aussi avec $\mathbf{F}_p$:

```
P.<u,v,w>=GF(7)[]
```

Vérifions que SAGE connaît bien le Frobenius :

```
(u+v+w)^7==u^7+v^7+w^7
```

On peut également construire des corps de fractions. Par exemple :

```
Q=FractionField(P)
```

Pour se rappeler de ce qu'on fait il suffit d'écrire

```
sage: Q
```

```
Fraction Field of Multivariate Polynomial Ring in u, v, w over Finite Field of size 7
```

Exercice 1. Déterminer si les courbes algébriques affines suivantes sont irréductibles.

$$C = \{(x,y) \in \mathbf{Q} \ : \ x^6 + 2x^4 + y^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 2xy^2 + 2y^2 + 2x^3y^2\}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{Q}^2 \ : \ y^6 - x^3y^2 - xy^4 + x^4 - y^4 + x^3 - xy^2 + x^2 - y^2 + 2x + 1 = 0\}.$$

Correction. On travaillera avec $A = \mathbf{Q}[x,y]$. Soit

$$f = x^6 - 2x^3y^2 + 2x^4 + y^4 + 2x^3 - 2xy^2 + x^2 - 2y^2 + 2x + 1.$$

On fait

```
f.factor()
```

et on trouve

```
(-x^{3} + y^{2} - x - 1)^{2}.
```

La courbe est irréductible. Ensuite,

```
g=y^6-x^3*y^2-x*y^4+x^4-y^4+x^3-x*y^2+x^2-y^2+2*x+1
```

On fait

```
g.factor()
```

et on obtient

```
g=(y^2-x-1)*(y^4 - x^3-x-1).
```

On peut également faire

```
g.is_irreducible()
```

Exercice 2. Soient

$$f = x^2 - 2y^2 + xy - 2x + 5y$$
$$g = x^2 + xy + y - x - 2.$$

Déterminer explicitement $\mathcal{Z}(f) \cap \mathcal{Z}(g)$.

Correction. On les considère f, g comme des éléments de $\mathbf{Q}(y)[x]$.

```
K=FractionField(PolynomialRing(QQ,'x')).
```

produit le corps $\mathbf{Q}(x)$. Il est important d'expliquer ensuite que `x` appartient à K en écrivant `x=K.gen()`. Ensuite, on produit l'anneau

```
A=PolynomialRing(K,'y').
```

À nouveau, `y=K.gen()` explique que `y` est un élément de A. On trouve la relation de Bézout avec `xgcd(f,g)`. (gcd = "greatest common divisor".) Ceci donne

```
(1,-1/2/(x^2-3/2*x-1),(-1/(x^3-1/2*x^2-5/2*x-1))*y

+(3/2*x+1/2)/(x^3 - 1/2*x^2 - 5/2*x - 1))
```

qui se lit plus facilement ainsi

$$1 = \frac{1}{x^2 - \frac{3}{2}x - 1} \cdot f + \left(\frac{-y}{x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 1} + \frac{\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}{x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 1} \right) \cdot g$$

Donc

$$d(x) := (x^2 - (3/2)x - 1) \cdot (x^3 - (1/2)x^2 - (5/2)x - 1) = a(x, y)f + b(x, y)g.$$

Les abscisses des points d'intersection sont parmi les racines de d. On utilise `factor()` pour trouver

$$X^2 - \frac{3}{2}X - 1 = (X + \frac{1}{2})(X - 2)$$

et

$$X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{5}{2}X - 1 = (X - 2)(X + \frac{1}{2})(X + 1).$$

Alors les points d'intersection sont sur les droites $X = -\frac{1}{2}$, $X = 2$ et $X = -1$. On peut substituer en mettant `g(x=-1/2)`. On trouve :

$$f(-1/2, Y) = -2Y^2 + 9/2Y + 5/4 \quad \text{et} \quad g(-1/2, Y) = (1/2)Y - 5/4$$

L'unique solution de $g(-\frac{1}{2}, Y) = 0$ est $y = 5/2$, qui est aussi une solution de $f(-\frac{1}{2}, Y) = 0$. De même, la seule solution de $g(2, Y) = 3Y$ est $Y = 0$ et on voit que $(2, 0)$ est un autre point d'intersection. Finalement, avec la même méthode, on obtient $g(-1, Y) = 0$ et $f(-1, Y) = -2Y^2 + 4Y + 3$. Toutes les solutions de $f(-1, Y) = 0$ sont des points d'intersection. Il est clair que $-2Y^2 + 4Y + 3$ est irréductible sur $\mathbf{Q}$, mais on peut de toute façon trouver ses solutions.

Exercice 3. Avec SAGE on peut aussi faire des graphes des courbes ! Prenons par exemple la lemniscate de Bernoulli. On doit d'abord spécifier des variables

```
x,y=var('x,y')
```

```
implicit_plot((x^2+y^2)^2-(x^2-y^2),(-2,2),(-2,2))
```

Exercice 4. Déterminer les composantes irréductibles des courbes définies par les équations suivantes.

1) $f = Y^3 - X^3 + X^2Y - XY^2 + X^2 + Y^2 + X - Y - 1$.

2) $g = 2X^2Y - 2X^3 + Y^2 - XY + X - Y$.

3) $h = X^2 - 5XY + 6Y^2$.

Exercice 5. Soient

$$\{P_i = (x_i, y_i) \in \mathbf{Q}^2 \ : \ i = 1, \ldots, 5\}$$

des points distincts de $\mathbf{Q}^2$. On souhaite construire une conique passant par $\{P_i\}$.

1) Soit

$$f = a_{22}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{10}x + a_{01}y + a_{00}.$$

Quelles sont les équations que le vecteur

$$(a_{20}, a_{11}, a_{02}, a_{10}, a_{01}, a_{00})$$

doit satisfaire pour que la conique C passe par $\{P_i\}_{i=1}^5$?

Correction. C'est l'équation

$$\begin{pmatrix} x_i^2 & x_iy_i & y_i^2 & x_i & y_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{20} \\ a_{11} \\ a_{02} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{00} \end{pmatrix} = 0.$$

2) Pour chacun des ensembles suivants, déterminer l'équation d'une conique les contenant. Déterminer dans quels cas il y a une deuxième conique passant par ces mêmes points.

$$S = \{(0,0), (-1,1), (1,1), (-1,1), (-1,-1)\}$$

$$T = \{(0,0), (1,4), (2,1), (6,7), (-1,0)\}.$$

Correction. Il suffit de construire la matrice ayant les bonnes lignes. Pour automatiser, on peut travailler ainsi. On definit une fonction.

```
def f(u,v):return [u^2,u*v,v^2,u,v,1]
```

Ceci est une liste. On va construire maintenant une matrice à partir des listes.

```
def m(x1,y1,x2,y2,x3,y3,x4,y4,x5,y5)

:return matrix([f(x1,y1),f(x2,y2),f(x3,y3),f(x4,y4),f(x5,y5)])
```

Notre matrice maintenant pour étudier le problème des points dans S est ainsi

```
m(0,0,1,1,-1,-1,1,-1,-1)
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec la commande `(m(0,0,1,1,-1,-1,1,-1,-1,1)).right_kernel()` on trouve le vector

```
[ 1  0 -1  0  0  0]
```

du noyau. Finalement, le polynôme qu'on veut est $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Il s'agit, bien évidemment, de la diagonale et l'antidiagonale. Pour T, on trouve la conique

$$\{(x, y) \,:\, 18x^2 - 33xy + 22y^2 + 18x - 64y = 0\}.$$

□

3) Est-il possible, dans les cas précédents, de trouver une deuxième conique passant par ces points ?