Faculté de Sciences
Algèbre, Géométrie et Calculs
Janvier–Mai 2023.

Feuille d'exercices n° 1

Généralités sur les anneaux factoriels

Exercice 1. Soit A un anneau intègre.

1) Soit $f \in A$ irréductible. Montrer que si $f = gh$, alors soit $g \in A^\times$, soit $h \in A^\times$.
2) Montrer que $A[X]^\times = A^\times$. En particulier, si $u \in A[X]^\times$, alors $\deg u = 0$.
3) Soit $f \in A[X]$ unitaire et de degré strictement positif. Montrer que soit f est irréductible, soit f est divisible par $g \in A[X]$ tel que $0 < \deg g < \deg f$.
4) Montrer que l'affirmation précédente est fausse si f n'est pas supposé unitaire.

Exercice 2. 1) Soit $A = \mathbf{Z}[\mathrm{i}\sqrt{5}] = \{a + b\mathrm{i}\sqrt{5} \ : \ a, b \in \mathbf{Z}\}$. Montrer que A n'est pas factoriel.

2) Soit k un corps et soit $A = k[X^2, X^3]$. Montrer que A est un anneau intègre qui n'est pas factoriel. Indication : Étudier les éléments de la forme X^{2m+3n}.
3) Soit $\mathscr{C}$ l'anneau des fonctions de classe C^∞ de $\mathbf{R}$ dans lui même et $\mathscr{T}$ le sous-anneau $\mathbf{R}[\cos, \sin]$.
   (a) En écrivant $\cos_n(x) = \cos(nx)$ et $\sin_n(x) = \sin(nx)$, prouver que $\mathscr{T}$ est le sous-espace réel de $\mathscr{C}$ engendré par $\{\cos_n, \sin_n\}_{n\in\mathbf{N}}$. (Indication : Utiliser les fonctions $\varphi_k(x) = e^{\mathrm{i}kx}$.)
   (b) Montrer que $\mathscr{T}$ est intègre.
   (c) Montrer que $\mathscr{T}$ n'est pas factoriel. Indication : En raisonnant par absurde, montrer que $1 - \sin$ ne peut pas être le carré d'une fonction dérivable.

Exercice 3. Soit $\mathscr{O}$ l'anneau des fonctions holomorphes sur $\mathbf{C}$.

1) Justifier brièvement : $\mathscr{O}$ est intègre.
2) Pour chaque $c \in \mathbf{C}$, on définit $t_c(z) = z - c$. Montrer que t_c est *premier*. Indication : Quel est le noyau du homomorphisme $\varepsilon_c : \mathscr{O} \to \mathbf{C}$ défini par $\varepsilon_c(\varphi) = \varphi(c)$?
3) Soit $p \in \mathscr{O}$ irréductible. Montrer que p s'annule exactement une fois.
4) Soit $f(z) = \sin(\pi z)$. Montrer que $t_n \mid f$ pour chaque n.
5) Montrer que f ne peut pas s'écrire comme produit fini d'éléments irréductibles.

Exercice 4. (1) Soit K un corps et $v : K \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ une valuation. Montrer que $\mathscr{O}_v = \{x \in K : v(x) \geqslant 0\}$ est un sous-anneau de K.

(2) Étant donné un premier p de $\mathbf{Z}$, décrire $\mathscr{O}_{v_p} \subset \mathbf{Q}$. Montrer ensuite que chaque valuation $v : \mathbf{Q} \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ est de la forme v_p pour un certain nombre premier p.

(3) Soit $c \in \mathbf{C}$ et soit $v_c : \mathbf{C}(z) \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ la valuation associée à $z - c$. Décrire $\mathscr{O}_{v_c}$. Soit V l'ensemble des valuations $v : \mathbf{C}(z) \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ telles que $v(\mathbf{C}^*) = \{0\}$. Montrer qu'il existe une valuation $v_\infty \in V$ telle que $V = \{v_c : c \in \mathbf{C}\} \cup \{v_\infty\}$. Dit autrement, V est en bijection avec la sphère de Riemann $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Autour du Lemme de Gauss

Exercice 5. Soit A un anneau factoriel de corps de fractions K.

1) Soit $f \in A[X]$ un polynôme primitif. Montrer que si f est irréductible dans $K[X]$, alors f est aussi irréductible dans $A[X]$.

2) Donner un exemple d'un $f \in A[X]$ qui est irréductible dans $K[X]$, mais n'est pas irréductible dans $A[X]$.

3) Montrer que pour chaque $a \in \mathbf{C}$, le polynôme $f = X^3 + Y^3 - aXY \in \mathbf{C}[X, Y]$ est irréductible. (La courbe décrite par f est le Folium de Descartes.)

Exercice 6 (À propos du critère d'Eisenstein)**.** 1) Montrer que $Y^2 - X^3 - X - 1 \in \mathbf{C}[X, Y]$ est irréductible. De façon générale, montrer que si $f \in \mathbf{C}[X]$ n'a pas de racine multiple, alors $Y^2 - f(X) \in \mathbf{C}[X, Y]$ est irréductible.

2) Soit $f \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme ayant au moins une racine simple $\alpha \in \mathbf{C}$. Montrer que $Y^m - f(X)$ est irréductible. (Les courbes décrites par $Y^m = f$ sont dites hyperelliptiques.)

Exercice 7. Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux et soit $\varphi : A[X] \to B[X]$ le morphisme induit.

1) Montrer que si $f \in A[X]$ est unitaire et $\varphi(f)$ est irréductible, alors f est irréductible.

2) Montrer que l'hypothèse "est unitaire" ne peut pas être supprimée dans l'exercice précédent.

3) Montrer que $X^2 + Y^3 + YZ^3$ est irréductible.