Faculté de Sciences
Algèbre, Géométrie et Calculs
Janvier–Mai 2023.

Feuille d'exercices avec calcul algébrique n° 2

Exercice 1 (Transformations affines)**.** Soit $\alpha : k^2 \to k^2$ définie par $(x, y) \mapsto (x + y, y)$. Soit $f = (X^2 + Y^2)^2 - (X^2 - Y^2) \in \mathbf{Q}[X, Y]$ et $L = \mathcal{Z}_{\mathbf{Q}}(f)$; il s'agit de la lemniscate (ou au moins sa partie rationnelle).

1) La lemniscate, est-elle irréductible ?
2) Dessiner $M := \alpha^{-1}(L)$.
3) Déterminer la multiplicité de M en O. Pour quelles droites $D_t = \mathcal{Z}(Y - tX)$, avec $t \in \mathbf{Q}$, a-t-on $\langle M, D_t \rangle_O = \mathrm{mult}_O(M)$?

Exercice 2. Soit k un corps infini et $f \in k[X, Y]$ un polynôme de degré $d > 0$. Il existe un $a \in k$ tel que le coefficient de Y^d dans $f(X + aY, Y)$ est non-nul. Déterminer un tel a dans le cas $k = \mathbf{Q}$ et $f = X^4 + 2X^2Y^2 - X^2 + Y^2$.

Exercice 3. Soient

$$f = a_{00} + a_{10}X + a_{01}Y + a_{11}XY + a_{20}X^2 + a_{02}Y^2 \in \mathbf{Q}[X, Y]$$

et

$$\ell = rX + sY + t \in \mathbf{Q}[X, Y].$$

Utiliser SAGE pour étudier dans quels cas l'inégalité $\deg(\mathrm{res}_Y^{2,1}(f, \ell)) < 2$ est vraie (et ainsi vérifier le résultat que nous avons obtenu en cours).

Exercice 4. On étudie la sextique de Cayley est la courbe $C = \mathcal{Z}_{\mathbf{R}}(f)$ où $f = 4(X^2 + Y^2 - X)^3 - 27(X^2 + Y^2)^2$.

1) Dessiner C ; voyez-vous un point singulier autre que $O = (0, 0)$? Lequel ? On le désignera par S.
2) Montrer que O et $S = (-1/2, 0)$ sont les seules singularités de C.
3) Calculer la multiplicité de f au point O et au point S. Pour cela, on utilise l'idéal $I = (x, y)$.