Faculté de Sciences
Algèbre, Géométrie et Calculs
Janvier–Mai 2023.

Feuille d'exercices n° 2

Singularités

Exercice 1 (Dérivations)**.** Soit A une k-algèbre. Une application k-linéaire $\partial : A \to A$ est dite une dérivation si elle satisfait la règle de Leibniz

$$\partial(fg) = f \cdot \partial(g) + \partial(f) \cdot g \tag{L}$$

pour tous $f, g \in A$.

(1) Soit $\partial : A \to A$ une dérivation. Montrer que la règle usuelle $\partial(f^n) = nf^{n-1}\partial(f)$ est vraie. Utiliser cela pour prouver que si k est de caractéristique $p > 0$, alors $\partial(f^p) = 0$ pour tout $f \in A$.

(2) Montrer que si ∂ est une dérivation, alors $a\partial : f \mapsto a \cdot \partial(f)$ est aussi une dérivation pour chaque $a \in A$. Montrer que toute dérivation ∂ de $P = k[X_1, \ldots, X_n]$ a la forme $\sum_{i=1}^n f_i \partial_i$, où ∂_i est la dérivée rapport à X_i et f_i est un élément de P.

(3) Soit $\Phi : A' \to A$ un morphisme de k–algèbres. Montrer que si $\partial : A \to A$ est une dérivation, alors $\partial\Phi : A' \to A$ satisfait

$$\partial\Phi(fg) = \partial\Phi(f) \cdot \Phi(g) + \Phi(f) \cdot \partial\Phi(g) \qquad \text{pour tout } f, g \in A'. \tag{L_Φ}$$

(4) Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ des éléments de $P = k[X_1, \ldots, X_n]$ et soit

$$\Phi : P \longrightarrow P$$

le morphisme de k-algèbres définit par $X_i \mapsto Y_i$. Montrer la règle de la chaîne :

$$\begin{pmatrix} \partial_1(\Phi(f)) & \cdots & \partial_n(\Phi(f)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(\partial_1(f)) & \cdots & \Phi(\partial_n(f)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 Y_1 & \cdots & \partial_n Y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 Y_n & \cdots & \partial_n Y_n \end{pmatrix}.$$

(Une façon moins encombrante d'écrire cette règle est $\partial_j(f(\boldsymbol{Y})) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\boldsymbol{Y}) \cdot \partial_j Y_i$.)
Indication : Prouver que les applications k-linéaires

$$f \mapsto \partial_j\Phi(f) \quad \text{et} \quad f \mapsto \sum_{i=1}^n \Phi(\partial_i f) \cdot \partial_j Y_i$$

satisfont la "formule de Leibniz" (L_Φ).

(5) Utiliser les questions précédentes pour montrer que si $\varphi : k^2 \to k^2$ est une transformation affine inversible et $C \subset k^2$ une courbe plane, alors $C \in \mathrm{Sing}(C)$ si et seulement si $\varphi^{-1}(P) \in \mathrm{Sing}(\varphi^{-1}(C))$.

Exercice 2. Soit $C \subset \mathbf{C}^2$ une conique. Montrer que si C est singulière, alors C est réductible, c'est-à-dire, $C = L \cup M$ avec L et M des droites.

Exercice 3. On suppose k algébriquement clos.

(1) Montrer que si $f \in k[X, Y]$ est homogène de degré $n > 0$, alors il existe des polynômes homogènes de degré un, $\ell_1, \ldots, \ell_m$, tels que

(a) le polynôme f s'écrit comme $\ell_1^{e_1} \cdots \ell_m^{e_m}$ pour des entiers $e_i > 0$.

(b) ℓ_i et ℓ_j ne sont pas associés si $i \neq j$.

Montrer que les polynômes ℓ_i sont uniques, à multiplication scalaire près. Les droites $\mathcal{Z}(\ell_i)$ sont les tangentes à $\mathcal{Z}(f)$ en O.

Soit $f \in k[X, Y]$ non-constant et sans facteur carré. On suppose que $O \in \mathcal{Z}(f)$ et qu'il est un point de multiplicité $n > 0$. Soit $f = f_n + \cdots$, avec f_i homogène de degré i. Les tangentes à $\mathcal{Z}(f)$ en O sont les tangentes à $\mathcal{Z}(f_n)$ en O.

(2) Déterminer les tangentes à $L = \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}((X^2 + Y^2)^2 - (X^2 - Y^2))$ en O.

(3) Soit $f \in k[X, Y]$ un polynôme non-constant et sans facteur carré et C la courbe plane qui s'en déduit. On suppose que $O \in C$ est un point de multiplicité $n > 0$. Monter que $\langle C, D\rangle_O > \mathrm{mult}_O(C)$ si et seulement si D est une tangente.

(4) Soit $f \in k[X, Y]$ un polynôme non-constant et sans facteur carré et C la courbe plane qui s'en déduit. Soit $P \in C$ un point de multiplicité n. Soient α et β des transformations affines inversibles telles que $\alpha(O) = \beta(O) = P$. Soient $\{D_i\}_{i=1}^r$ les tangentes à $\alpha^{-1}(C)$ en O et $\{E_i\}_{i=1}^s$ les tangentes à $\beta^{-1}(C)$ en O. Montrer que $r = s$ et que, à moins d'une permutation, l'on a $\alpha(D_i) = \beta(E_i)$.

Exercice 4. Soit $f = X^2 - Y(X^2 + Y^2)$ et soit $C = \mathcal{Z}_{\mathbf{C}}(f)$ la Cissoïde. Déterminer tous ses points singuliers et, pour chacun de ces points, leurs tangentes.

Le résultant

Exercice 5 (Nombres algébriques)**.** On dit que $\alpha \in \mathbf{C}$ est algébrique si α est racine d'un certain $f \in \mathbf{Q}[X]$ de degré strictement positif. Dans ce cas, f est dit un polynôme annulateur de α. Soient α et β des nombres algébriques tels que $f(\alpha) = 0$, respectivement $g(\beta) = 0$, avec $f \in \mathbf{Q}[X]$ de degré $d \geqslant 1$ et $g \in \mathbf{Q}[X]$ de degré $e \geqslant 1$. Montrer que $\mathrm{res}_Y^{d,e}(f(X - Y), g(Y))$ est un polynôme anulateur de $\alpha + \beta$. En déduire un polynôme anulateur pour le nombre réel $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

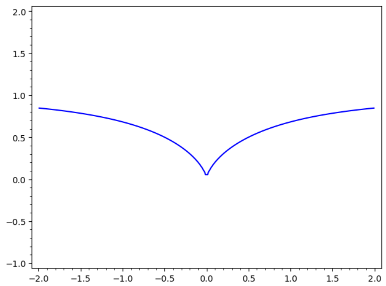

FIGURE 1 – La cissoïde

Exercice 6 (Le résultant et les racines)**.** Soit k un corps quelconque. Soient d et e des entiers strictement positifs. Étant données des variables $U_1, \ldots, U_d$, $V_1, \ldots, V_e$, on considère l'anneau

$$A = k[U_1, \ldots, U_d, V_1, \ldots, V_e]$$

ainsi que deux polynômes de $A[X]$:

$$F = (X - U_1) \cdots (X - U_d) \quad \text{et} \quad G = (X - V_1) \cdots (X - V_e);$$

Dans la suite, soit

$$R = \operatorname{res}_X^{d,e}(F, G)$$

et soit

$$S = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant d \\ 1 \leqslant j \leqslant e}} (U_i - V_j).$$

(1) Pour chaque couple $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $j \in \{1, \ldots, e\}$, soit

$$A_i = k[U_1, \ldots, U_{i-1}, U_{i+1}, \ldots, U_d, V_1, \ldots, V_e]$$

l'anneau de polynômes avec la variable U_i omise et soit

$$\varphi_{ij} : A \longrightarrow A_i$$

le morphisme

$$f \longmapsto f(U_1, \ldots, U_{i-1}, V_j, U_{i+1}, \ldots, U_d, V_1, \ldots, V_e)$$

obtenu en remplaçant U_i par V_j. Si $\varphi_{ij} : A[X] \to A_i[X]$ désigne l'extension naturelle de φ_{ij}, montrer que $\operatorname{res}_X^{d,e}(\varphi_{ij}(F), \varphi_{ij}(G)) = 0$. En déduire que $U_i - V_j$ divise R.

(2) Montrer que $S \mid R$.

(3) Utiliser le degré de R pour montrer que $R = S$.

(4) Soient K un corps arbitraire, d et e des entiers strictement positifs. On se donne $a, b \in K$ ainsi que $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in K^d$ et $(\beta_1, \dots, \beta_e) \in K^e$. Montrer que si $f = a \prod_{i=1}^{d} (X - \alpha_i)$ et $g = b \prod_{j=1}^{e} (X - \beta_j)$, alors

$$\mathrm{res}^{d,e}(f, g) = a^e b^d \prod_{i=1}^{d} \prod_{j=1}^{e} (\alpha_i - \beta_j).$$

En déduire que si $d \geqslant 1$, alors

$$\mathrm{res}^{d,d-1}(f, f') = a^{2d-1} \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j).$$