Faculté de Sciences
Algèbre, Géométrie et Calculs
Janvier–Mai 2023.

Feuille d'exercices n° 5

Convention. Dans la suite, k est un corps algébriquement clos et $\mathbf{P}^2$ est l'espace des droites vectorielles de k^3.

Exercice 1. Soient $f, g \in k[X,Y] \smallsetminus k$ premiers entre eux. On se donne un autre corps algébriquement clos K contenant k. Soient $C = \mathcal{Z}_k(f) \subset k^2$, $D = \mathcal{Z}_k(g) \subset k^2$, $C_K = \mathcal{Z}_K(f) \subset K^2$ et $D_K = \mathcal{Z}_K(g) \subset K^2$.

(1) Donner un exemple, dans le cas $k = \mathbf{C}$, où $C \subsetneqq C_K$.

(2) Montrer que $C \cap D = C_K \cap D_K$.

Que dire dans le cas des courbes projectives ?

Exercice 2. Soient $f = X^2 + Y^2 - 2X$ et $g = Y^2 - X$. Soient C et D les clôtures projectives de $\mathcal{Z}(f)$ et $\mathcal{Z}(g)$ respectivement. Déterminer $C \cap D$ et les multiplicités.

Exercice 3. Soit $S \in \mathbf{P}^2$ un ensemble de cinq éléments.

(1) Montrer qu'il existe au moins une conique $C = \mathcal{Z}(F)$ contenant S. Indication : Soit V l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré deux. Quel est sa dimension ?

(2) On admet l'existence d'une deuxième conique $D = \mathcal{Z}(G)$ contenant S. Prouver qi'il existe des droite distinctes L, C_1 et D_1 telles que $C = L \cup C_1$ et $D = L \cup D_1$. En déduire que au moins quatre points de S appartiennent à L.