Sorbonne Université
1M001 – Analyse et Algèbre pour les Sciences
Septembre–Décembre 2018.

Feuille d'exercices n° 1

Propriétés basiques des rationnels et des réels

Exercice 1 (Récurrence)**.** Montrer par récurrence que

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$;

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 2. Le but de cet exercice est d'étudier le développement décimal d'un nombre rationnel à partir de la division euclidienne. Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$, tel que $p < q$. On écrit $x = p/q$.

a) Soit $10p = d_1 q + r_1$ la division euclidienne de $10p$ par q. Montrer que d_1 est la première décimale de x.

b) En écrivant $x = \dfrac{d_1}{10} + \dfrac{r_1}{10q}$, et effectuant le même raisonnement pour le rationnel $x_1 = \dfrac{r_1}{q}$, obtenir la deuxième décimale de x.

c) Montrer comment itérer ce raisonnement.

d) Donner l'expression décimale des rationnels $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{99}$ et $\dfrac{22}{7}$.

e) Montrer que le développement décimal de x est périodique à partir d'un certain rang, de période inférieure à q.

f) Montrer, réciproquement, que si $x = 0, d_1 d_2 \cdots$ est un réel tel que la suite (d_n) est périodique, alors x est rationnel. [Mise en garde : Cet exercice emploie tacitement la notion de limite d'une suite !]

Exercice 3. Traiter les questions suivantes.

a) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $x^2 \leqslant y^2$ seulement si $x \leqslant y$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, rappeler la définition de $\sqrt{x}$. Montrer que si $0 \leqslant x \leqslant y$, alors $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$.

Exercice 4. Traiter les questions suivantes.

a) Écrire les ensembles suivants comme réunion d'intervalles.

$$I = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| < 1\}, \quad A = \{x \in \mathbb{R} : |3-2x| < 5\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |2x| > |5-2x|\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : |2-x| > 1+|x|\}, \quad D = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x+|x-1|} < 2\right\}.$$

b) Soit $a \in \mathbb{R}$ strictement positif fixé. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $|a+x| = |a|+|x|$. Même question avec $||a|-|x|| = |a-x|$.

c) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2} \quad \text{et} \quad \min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

Exercice 5. Soit X un sous-ensemble de $]0,1]$. Montrer que X est majoré, et que $\sup X \leqslant 1$. Ensuite, montrer que X est minoré. Pouvez-vous dire que $\inf X > 0$?

Exercice 6. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ sont-ils majorés, minorés ? Déterminer, lorsqu'elle existe, leur borne supérieure et leur borne inférieure. Ces ensembles ont-ils des maximum et des minimum ?

$$E_1 = \left\{1+\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad E_2 = \left\{1-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad E_3 = \left\{\frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N}^*\right\},$$

$$E_4 = \left\{\frac{1}{n}+(-1)^n : n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad E_5 = \left\{0,\underbrace{3\cdots3}_{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 7. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ vérifiant $a \leqslant b$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$. Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leqslant \inf B$.