Sorbonne Université
1M001 – Analyse et Algèbre pour les Sciences
Septembre–Décembre 2018.

Feuille d'exercices n° 2

Les suites

Exercice 1. Parmi les suites de terme général suivantes, lesquelles convergent, lesquelles divergent ?

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad b_n = \frac{3n-3}{2n+4}, \quad c_n = (-1)^n, \quad d_n = \frac{(-1)^n}{n+1}, \quad e_n = \frac{n\sin(n)}{n^2+1},$$

$$f_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad g_n = n^{(-1)^n}, \quad h_n = \frac{n^2+3}{n^2+2n-1}.$$

Exercice 2. Soit (x_n) une suite de réels positifs ayant limite ℓ. Montrer que $\ell \geqslant 0$. Ensuite, montrer que $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{\ell}$. [Indication : Écrire $x_n - \ell = (\sqrt{x_n} - \sqrt{\ell})(\sqrt{x_n} + \sqrt{\ell})$.]

Exercice 3 (Suite d'Héron)**.** Soit $A \in \mathbb{Q}$ strictement positif ; on souhaite construire une suite rationnelle convergente (x_n) telle que $\lim x_n^2 = A$. On définit x_0 comme étant un rationnel strictement positif et $y_0 = A/x_0$. Puis, si x_n et y_n ont été définis, on pose

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = A/x_{n+1}.$$

Géométriquement, ces choix correspondent à commencer avec un rectangle R_0 de côtés x_0 et y_0, donc ayant aire A, et construire le rectangle R_1 de côtés $\frac{x_0+y_0}{2}$ et aire A, etc. Le rectangle “limite” sera un carré d'aire A.

1) Montrer que $x_n > 0$.
2) En suite, en considérant
$$x_{n+1}^2 - A,$$
montrer que $x_n^2 \geqslant A$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3) Montrer que $(x_1, x_2, \ldots)$ est décroissante.
4) Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ.
5) Montrer que $\ell = \sqrt{A}$.

Exercice 4. Pour des suites réelles, les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1) Toute suite positive et non majorée tend vers $+\infty$.

2) Toute suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

3) Si une suite admet une limite $\ell > 0$, alors tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

4) Toute suite non bornée diverge.

5) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites vérifiant $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$. Alors les deux suites convergent et ont même limite.

6) Si une suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors elle converge si et seulement si elle est stationnaire.

7) Montrer que si $a_n \to 0$ et (b_n) est bornée, alors $\lim a_n b_n = 0$. Et si on supprime l'hypothèse "(b_n) bornée" ?

Exercice 5 (Suites de Cauchy)**.** On dit qu'une suite réelle (x_n) est de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_m - x_n| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall\, m, n \geqslant N.$$

(a) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.

(b) Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

(c) Montrer, finalement, que toute suite de Cauchy est convergente. [Cette partie est plus difficile. Une façon d'y arriver à la preuve est d'appliquer le Théorème de Bolzano-Weierstrass.]

Exercice 6 (Le nombre d'or)**.** Le nombre d'or est le réel $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; on souhaite montrer que

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}$$

On écrit $a_1 = 1$ et on définit a_{n+1} par $\sqrt{1 + a_n}$.

1) Montrer que $1 \leqslant a_n$. [Indication : Récurrence.]

2) Montrer que $a_n < 2$ pour tout $n \geqslant 1$. [Indication : Récurrence.]

3) Montrer par récurrence que $a_{n+1} > a_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

4) Montrer que $\lim a_n = \varphi$.