Sorbonne Université
1M001 – Analyse et Algèbre pour les Sciences
Septembre–Décembre 2018.

Feuille d'exercices n° 3

Limites et continuité des fonctions

Exercice 1. Calculer les limites suivantes :

$$A = \lim_{x\to 4}\left(2x^3+3x+5\right),\ B = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2}{x^3-7},\ C = \lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5},\ D = \lim_{x\to 0}\frac{x^3-9x}{x^2+3x},$$

$$F = \lim_{x\to 1}\frac{x^3-9x}{x^2+3x},\ G = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^7-1},\ H = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3},\ I = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2|x|}{x}.$$

Exercice 2. On considère la fonction valeur absolue $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.

1. Rappeler l'inégalité triangulaire.
2. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $||x| - |y|| \leqslant |x-y|$.
3. En déduire que $|\cdot|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite de Lipschitz s'il existe un $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on ait $|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|$. Montrer que toute fonction de Lipschitz est continue.

Exercice 4. Montrer que la fonction $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue. [Indication : Utiliser $(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a}) = x-a$.]
Calculer ensuite $K = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^m}$ (pour $m \in \mathbb{N}$) et $L = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

Exercice 5 (Continuité par parties)**.** (a) Soit $I = [a,b]$ et $m \in [a,b]$. On se done $f : [a,m] \to \mathbb{R}$ et $g : [m,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que la fonction

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,m] \\ g(x), & x \in]m,b] \end{cases}$$

est continue si et seulement si $f(m) = g(m)$.

(b) Soit f une fonction continue définie sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(2x), & 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ f(2x-1), & 1/2 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

i) Esquisser le graphe de g dans le cas particulier $f(x) = x - x^2$.

ii) Montrer que g est continue sur $[0,1]$.

Exercice 6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $a \in I$.

(1) On suppose que $f(a) > 0$. Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $f(x) > 0$ pour tout $x \in I \cap V$.

(2) On suppose que $f(a) > g(a)$. Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in I \cap V$.

(3) Ces énoncés sont-ils encore vrais si l'on remplace les inégalités strictes par des inégalités larges ?

Exercice 7. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On écrit $f_+(x) = \max\{0, f(x)\}$. Montrer que si f est continue, alors f_+ l'est également.

Exercice 8. Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $x', x'' \in]b-\delta, b[$, alors $|f(x') - f(x'')| \leqslant \varepsilon$. Montrer que $\lim\limits_{x \to b-} f(x)$ existe. [Indication : Utiliser que une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy.]

Le théorème de la valeur intermédiaire

Exercice 9. Utiliser le théorème de la valeur intermédiaire pour trouver un $x \in [-1,0]$ tel que

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt[3]{x^5+2}.$$

Exercice 10. Soient I un intervalle non-vide et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

(a) On suppose que f est continue et que son image $f(I)$ est un ensemble *fini*. Montrer que f est constante.

(b) L'énoncé précédent, est-il vrai si on supprime l'hypothèse de continuité ? Justifiez.

Exercice 11. On souhaite appliquer le théorème de la valeur intermédiaire pour étudier les racines d'une polynôme.

1) Soit $p(x) = x^4 - 3x^2 + x - 2$. Montrer que p possède une racine entre 0 et 2.

2) Soit $p(x) = x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_0$ un polynôme réel de degré *impair*.

(a) Expliquer brièvement pourquoi $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

(b) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} p(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$.

(c) Montrer que p possède une racine réelle.

Exercice 12. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une application continue. En étudiant la fonction $\Delta(x) = f(x) - x$, montrer que f possède un point fixe, c'est-à-dire, qu'il existe un $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.