Sorbonne Université
1M001 – Analyse et Algèbre pour les Sciences
Septembre–Décembre 2018.

Feuille d'exercices n° 4

Le théorème des bornes atteintes

Exercice 1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue ne prenant que des valeurs *strictement positifs*. Montrer que pour un certain $\varepsilon > 0$, on a $f(x) \geqslant \varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$. La propriété précédente, est-elle encore vraie si on remplace $[a, b]$ par un intervalle $[a, b[$?

Exercice 2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $f([a, b]) = [m, M]$ pour certains $m \leqslant M$. Peut-on déduire que $m = f(a)$ et $M = f(b)$?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Montrer l'existence d'un $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(m) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 (Fonctions périodiques)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Un réel ω est dit une période de f si $f(x + \omega) = f(x)$ pour tout x. L'ensemble des périodes de f sera noté Ω.

(1) Remarquer que Ω est un sous-group de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, que si $\omega, \omega' \in \Omega$, alors $\omega+\omega' \in \Omega$ et $-\omega \in \Omega$.

(2) Donner un exemple d'une fonction *discontinue* de période 1.

On suppose à présent que f est continue.

(3) Montrer que f est une fonction bornée.

(4) Soit $\alpha = \inf\{\omega \in \Omega : \omega > 0\}$. Montrer que α est aussi une période de f.

(5) Montrer que si $\alpha > 0$, alors $\Omega = \{k\alpha : k \in \mathbb{Z}\}$.

(6) Montrer que si, par contre, $\alpha = 0$, alors f est constante. [Indication : On choisira une période très petite et, en suite, on fera le dessin de ses multiples.]

Propriétés élémentaires des fonctions dérivables

Exercice 5. On souhaite étudier la dérivée des fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

1. Rappeler la définition de $\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$. Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en $]0, +\infty[$, mais que elle ne l'est pas en 0.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler la définition de $\sqrt[n]{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

(a) Soit $x > 0$ et $y \geqslant 0$ distincts. En écrivant $\xi = \sqrt[n]{x}$ et $\eta = \sqrt[n]{y}$, prouver que

$$\frac{\eta - \xi}{y - x} = \frac{1}{\eta^{n-1} + \eta^{n-2}\xi + \cdots + \eta\xi^{n-2} + \xi^{n-1}}.$$

(b) En déduire la preuve de $\dfrac{d\sqrt[n]{x}}{dx} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$ pour $x > 0$.

(c) Montrer que $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 6 (Règle de l'Hôpital)**.** Soit I un intervalle ouvert non vide et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications dérivables. On suppose de plus que g' ne s'annule pas sur I. Soit $a \in I$ un point où f et g s'annulent. Montrer que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Comme application, trouver la limite quand $x \to 0$ de la fonction $\varphi(x) = \dfrac{\cos(x) - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

Exercice 7. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = f(1)$. On introduit

$$\begin{cases} f(2x), & 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ f(2x-1), & 1/2 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

La fonction g, est-elle continue ? Dérivable ? Si non, quelles hypothèses doit on introduire pour que cela soit le cas.

Le théorème des accroissements finis

Exercice 8. Soit I une intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $f' : I \to \mathbb{R}$ est continue. Montrer que pour tout $[a,b] \subset I$, il existe un $k > 0$ tel que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

pour tout $x, y \in [a,b]$.

Exercice 9. Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $\ell := \lim\limits_{x \to b-} f'(x)$ existe. Montrer que f est dérivable à gauche en b et que sa dérivée vaut ℓ.

Exercice 10 (Le théorème des accroissements finis de Cauchy)**.** Soit $I = [a,b]$ un intervalle et $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On suppose que φ et ψ sont dérivables sur $]a,b[$. On introduit la courbe $\mathscr{C} = \{(\varphi(t), \psi(t)) \ : \ t \in [a,b]\}$ et on fixe les points $A = (\varphi(a), \psi(a))$ et $B = (\varphi(b), \psi(b))$ de $\mathscr{C}$.

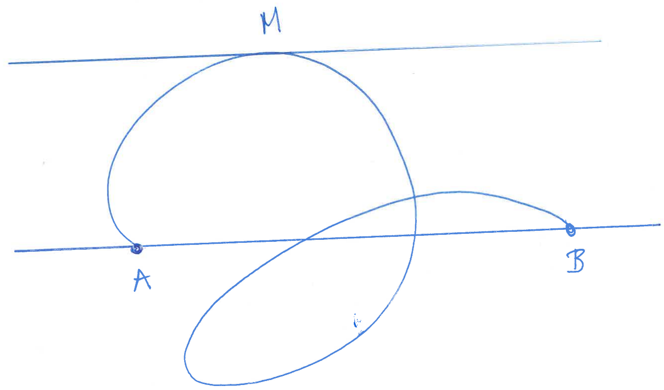

FIGURE 1 – Illustration du théorème des accroissements finis

1. Déterminer l'équation "paramétrique"
$$\{\lambda P + K \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$
de la droite $\overleftrightarrow{AB}$.
2. Pour un certain $M = (\varphi(m), \psi(m))$ de $\mathscr{C}$ différent de A ou B, on définit la tangente $T_M\mathscr{C}$ à $\mathscr{C}$ en M [1] comme étant la droite de vecteur directeur $(\varphi'(m), \psi'(m))$ passant par M. En admettant $\psi(b) \neq \psi(a)$ (ce qui signifie que $\overleftrightarrow{AB}$ n'est pas parallèle à l'axe des abscisses) montrer que $T_M\mathscr{C}$ est parallèle à $\overleftrightarrow{AB}$ si et seulement si
$$\frac{\varphi'(m)}{\psi'(m)} = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)}.$$
[On se rappellera que deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont proportionnels.]
3. En supposant encore que $\psi(b) \neq \psi(a)$, montrer que pour un certain $a < m < b$, les droites $T_M\mathscr{C}$ et $\overleftrightarrow{AB}$ sont parallèles. [Indication : On peut considérer la fonction $t \mapsto \varphi(t) \cdot (\psi(b) - \psi(a)) - \psi(t) \cdot (\varphi(b) - \varphi(a))$.]

Exercice 11. Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Déterminer si les affirmations suivantes concernant f sont vraies ou fausses.

(1) Si f est croissante, alors $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

(2) Si f est strictement croissante, alors $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$.

(3) On suppose que $I = [a, +\infty[$ avec $a > 0$, et que $f'(x) > 0$ pour tout x. Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

1. Attention : On devrait plutôt dire la droite tangente à l'instant m.

(4) On suppose que $I = [a, +\infty[$ avec $a > 0$, et que $f'(x) \geqslant c > 0$ pour tout x. Alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 12. Soit $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2x + 3}$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et g.
2. Déterminer dans quels intervalles f est croissante et décroissante.

Exercice 13. (La dérivée et les extremes). Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. On suppose que f atteint un maximum sur $c \in]a, b[$. Montrer que $f'(c) = 0$.
2. Vrai ou faux ? : La dérivée f' s'annule sur $[a, b]$ si f atteint un maximum sur $[a, b]$.