Sorbonne Université
1M001 – Analyse et Algèbre pour les Sciences
Septembre–Décembre 2018.

Feuille d'exercices n° 5

Fonctions élémentaires

Exercice 1. Répondre aux questions suivantes.

(1) Rappeler la définition de la fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Est-elle croissante ? Strictement croissante ? Ensuite, montrer que $\exp(t) \geqslant t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Quels sont ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$?

(2) Rappeler la définition de la fonction $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$. Est-elle croissante ? Strictement croissante ? Calculer ses limites en 0 et en $+\infty$. Ensuite, montrer que $\ln(t) < t - 1$ pour tout $t > 0$.

(3) Soit $\alpha > 0$. Soit $u : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $t \mapsto t^{-\alpha}\exp(t)$. Est-elles croissante ? Est-elle croissante dans un intervalle $[A, +\infty[$ avec $A > 0$? Calculer sa limite en 0 et en $+\infty$.

(4) Pour tout $\alpha > 0$, soit $v : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto t^{-\alpha}\ln(t)$. Est-elle décroissante ? Est-elle décroissante dans un intervalle $[A, +\infty[$ avec $A > 0$? Calculer sa limite en 0 et en $+\infty$.

Exercice 2. Soit

$$\psi(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Montrer que ψ est dérivable partout et que $\psi'(0) = 1$. Puis, montrer que ψ n'est jamais monotone dans un voisinage de 0.

Exercice 3 (La spirale logarithmique)**.** Soit $b \geqslant 0$; on définit

$$\varphi(t) = e^{bt}\cos t, \quad \text{et} \quad \psi(t) = e^{bt}\sin t.$$

La spirale logarithmique $\mathscr{S}$ est la courbe plane formée par les points $\mathbf{p}(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, où $t \in \mathbb{R}$.

(1) Déterminer le vecteur tangent $\mathbf{p}'(t) = (\varphi'(t), \psi'(t))$ à $\mathscr{S}$ à l'instant t.

(2) Soit $\mathbf{p}(t)$ un point de la spirale, et soit D la demi-droite $\overrightarrow{\mathbf{0p}(t)}$. On suppose que D et $\mathscr{S}$ se coupent en $\mathbf{p}(t)$. Quel est l'angle entre $\mathbf{p}'(t)$ et D ? [1]

1. Rappel : L'angle entre les vecteurs non-nuls $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ est l'unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}$.

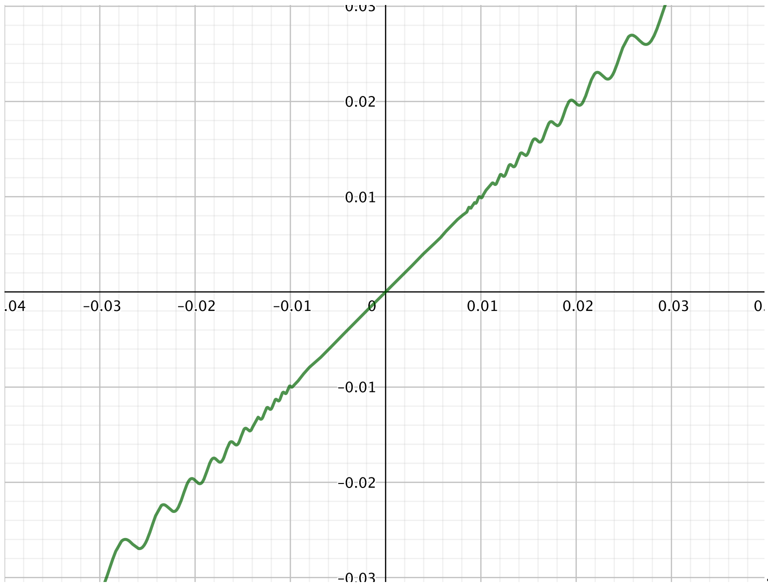

FIGURE 1 – La fonction ψ

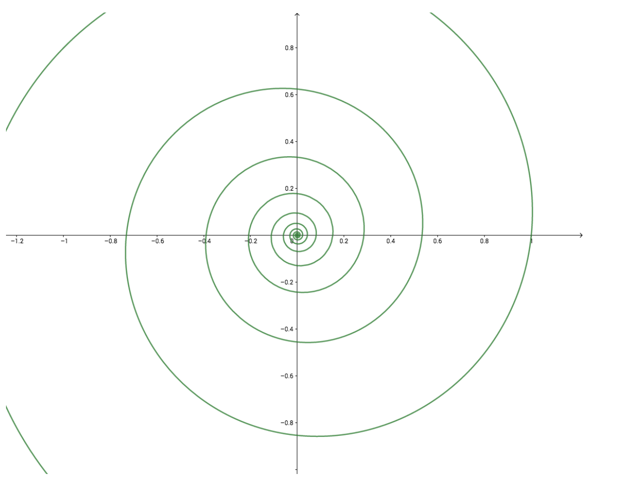

FIGURE 2 – La spirale logarithmique

Exercice 4 (Une formule de Viète)**.** On souhaite montrer la formule

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

(1) Montrer que

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

(2) Montrer que

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \cdot \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(3) Montrer que

$$\frac{\sin x}{x} = \lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n} \cos \frac{x}{2^\nu}.$$

(4) On définit une suite réelle $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $v_1 = \sqrt{2}$, et

$$v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{v_k}{2} = \frac{2}{\pi}.$$

Applications de la dérivée

Exercice 5. Parmi tous les rectangles de périmètre $p > 0$, lequel a une aire maximale ?

Exercice 6. On considère un cylindre “fermé” $\mathscr{C}_{r,h}$ d'hauteur $h > 0$ et rayon $r > 0$. En supposant que l'aire sa surface ($=2\pi r^2 + 2\pi rh$) est égale à 2π, trouver le rayon R pour lequel le volume $V = \pi r^2 h$ de $\mathscr{C}_{r,h}$ est maximal.

Exercice 7 (“Refraction”)**.** Soient a, b et d des réels strictement positifs. On souhaite étudier le chemin parcouru par un particule entre les points $A = (0, -a)$ et $B = (d, b)$ en faisant les hypothèses suivantes :

i) La particule se déplace en ligne droite et avec vitesse constante v_1 sur le demi-plan inférieur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant 0\}$.

ii) La particule se déplace en ligne droite et avec vitesse constante v_2 sur le demi-plan supérieur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$.

On souhaite trouver le point $M = (m, 0)$ par lequel la particule doit passer pour que le temps de déplacement entre A et B soit minimal.

1. Trouver une expression pour le temps $T(x)$ de déplacement entre A et B passant par un $P = (x, 0)$.
2. Montrer que si $T(m)$ est minimale, alors
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \phi_1}{\sin \phi_2},$$
où ϕ_1 et ϕ_2 sont comme dans la figure.
3. Montrer que
$$\lim_{x\to\pm\infty} T(x) = +\infty.$$
(Voir figure.)

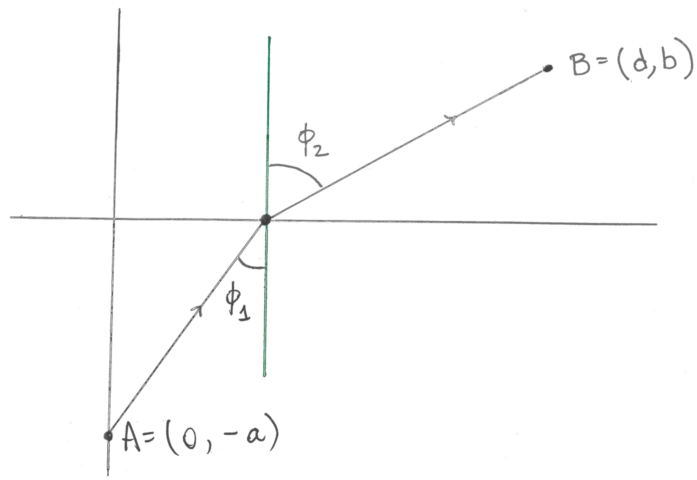

FIGURE 3 – Mouvement d'une particule

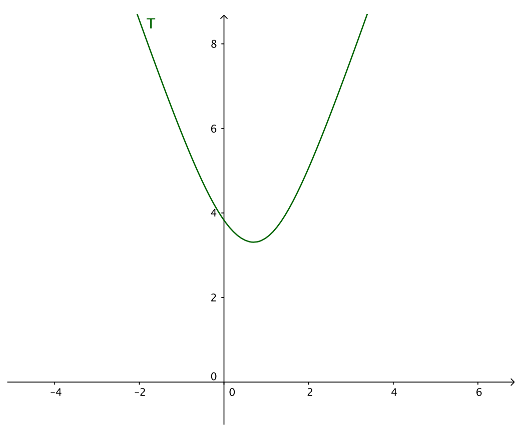

FIGURE 4 – Graphe de la fonction T

4. Déduire de l'item précédent que T possède un minimum sur $\mathbb{R}$.
5. Montrer que le minimum trouvé précédemment est en fait unique. (Indication : Étudier T''.)

Exercice 8 (Conservation de l'énergie totale)**.** Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x : I \to \mathbb{R}$ des fonctions réelles. On admet que l'équation différentielle

$$x''(t) = F(x(t))$$

est satisfaite (et par conséquent que x est deux fois dérivable). On suppose que $F = -U'$, où $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable. Montrer que "l'énergie totale"

$$E(x(t)) = \frac{|x'(t)|^2}{2} + U(x(t))$$

est constante.

Équations différentielles élémentaires

Exercice 9. Résoudre, sur un intervalle que l'on précisera, les équations différentielles suivantes :

(1) $y' = y$.

(2) $y' + 2y = 0$.

(3) $y' + \dfrac{2y}{x} = 0$.

(4) $(1 + x^2) \cdot y' = y$.

(5) $y' - 2y = x^2 - x$.

(6) $y' + y = e^x$.

(7) $y' + y = \cos(x) + \sin(x)$.

Exercice 10. Un corps de masse $m > 0$ est abandonné d'une hauteur $y_0 > 0$. On suppose que l'altitude y, vue comme fonction du temps t, satisfait l'équation différentielle

$$my''(t) = -mg - ky'(t),$$

où g est l'accélération de la pesanteur et $k > 0$ est une constante. (On considère ici l'existence d'une force de frottement.) Montrer que si $v = y'$ note la vitesse, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = -\dfrac{mg}{k}$. [Indication : On choisira une notation moins encombrante !]

Exercice 11. Soit C, E, R et p des constantes réelles strictement positives. On considère l'équation différentielle

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E\sin(pt).$$

Déterminer la solution de cette équation en admettant que $Q(0) = 0$. Indication : Montrer que $x \mapsto \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2} \cdot (a\sin(bx) - b\cos(bx))$ est une primitive de $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$.

Exercice 12 (Équations d'ordre deux)**.** Soit

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + p\frac{d}{dx} + q$$

un opérateur différentiel d'ordre deux avec coefficients constants p, q. Montrer que

$$L(e^{\lambda x}) = (\lambda^2 + p\lambda + q) \cdot e^{\lambda x}.$$

Utiliser cette observation pour résoudre l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de masse $m > 0$, raideur $k > 0$, et frottement μ,

$$mx''(t) = -kx(t) - \mu x'(t),$$

dans le cas où $\mu^2 > 4km$. Montrer, ensuite, que $x(t) \to 0$ pour $t \to +\infty$.