Sorbonne Université
1M001 – Analyse et Algèbre pour les Sciences
Septembre–Décembre 2018.

# Feuille d'exercices n° 6

## Nombres complexes

**Exercice 1.** Calculer la partie réelle et la partie imaginaire des complexes suivants :

$$z_1 = \frac{3+6i}{3-4i}, \quad z_2 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2, \quad z_3 = \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

**Exercice 2.** Déterminer le module et l'argument des complexes suivants :

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 3+3i, \quad z_3 = -1 - i\sqrt{3}, \quad z_4 = (1-i)^9, \quad z_5 = (\sqrt{5}-i)(\sqrt{5}+i).$$

**Exercice 3.** Déterminer tous les nombres complexes $z$ tels que (a) $|\overline{z}-i| = 1$, (b) $z\overline{z} = z^2$, (c) $i\Re(z^2) - \Im(z^2) = z$.

**Exercice 4.** Soit $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}$. Montrer que pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|1 + \cos(\theta) + \cdots + \cos(n\theta)| \leqslant \sqrt{2}.$$

Indication : On trouvera une expression pour cette somme en termes de la partie réelle d'un certain nombre complexe.

**Exercice 5.** Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

**Exercice 6.** Trouver les racines sous forme cartésienne des équations suivantes : (a) $Z^2 = 5 - 12i$ et (b) $Z^2 - (3+i)Z + 3i + 4 = 0$. Ensuite, déterminer les racines sous forme polaire des équations (c) $Z^3 = 1$ et (d) $Z^3 = -27i$.

**Exercice 7.** À l'aide de l'exponentielle complexe, trouver une primitive de la fonction $e^x \cos(x)$ ainsi qu'une primitive de $e^{3x} \sin(2x)$.

## Polynômes

**Exercice 8.** Faire la division euclidienne du polynôme $f \in \mathbb{R}[x]$ par le polynôme $g \in \mathbb{R}[x]$ dans les cas suivants.

(a) $f = x^3 - 1$ et $g = x - 1$.

(b) $f = x^9 - 1$ et $g = x^3 - 1$.

(c) $f = x^6 + 2x^5 - x^4 + 3x^3 + 11x^2 + 7x - 5$ et $g = x^2 + 2x - 1$.

(d) $f = x^7 + 2x^4 + 6x^2 + 2$ et $g = x^3 - x^2 + 1$.

**Exercice 9.** Répondre aux questions suivantes.

(a) Quelle est la multiplicité de 2 comme racine de $x^5 - 19x^3 + 34x^2 + 12x - 40$ ? Quelle est la multiplicité de 3 ?

(b) Quelle est la multiplicité de $-1$ comme racine de $p(x) = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 12x - 6$. Factoriser $p$ dans $\mathbb{R}[x]$ comme produit de polynômes irréductibles.

(c) Calculer la limite
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^7 - 2x^5 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2}.$$