Sorbonne Université
1M001 – Analyse et Algèbre pour les Sciences
Septembre–Décembre 2018.

Feuille d'exercices n° 7

Les polynômes de Taylor (développements limités)

Exercice 1. Déterminer le développement limité de $f(x) = \ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 5. Déterminer le développement limité de $g(x) = \sqrt[5]{1-x}$ en 0 à l'ordre 4. Déterminer le développement limité de $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ en 0 à l'ordre 3. Déterminer le développement limité de $k(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 2. Soit $f, g :]-1, +1[\to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{1-x} + e^{2x}$. Déterminer les développements limités de f en 0 à l'ordre 4, et de g en 0 à l'ordre 3.

Exercice 3. Soit $f, g :]-1, +1[\to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ et $g(x) = (\log(1+x))^2$. Déterminer les développements limités de f en 0 à l'ordre 6, et de g en 0 à l'ordre 4.

Exercice 4. Soit $f, g :]-1, +1[\to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \log(\cos x)$ et $g(x) = \sin(\log(1+x))$. Déterminer les développements limités de f en 0 à l'ordre 4, et de g en 0 à l'ordre 3.

Exercice 5.

1. Former le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 des fonctions $\cos x$ et $\log(1+x^4)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction
$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{\log(1+x^4)}.$$
Montrer que f admet une limite ℓ quand $x \to 0$. Ensuite, calculer ℓ.

Exercice 6. Déterminer le polynôme de Taylor de degré 2 centré en 0 de la fonction $f(x) = e^{\cos x}$. On le note P. Trouver ensuite une constante M telle que
$$|f(x) - P(x)| \leqslant M|x|^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7. Déterminer un polynôme $P(x)$ tel que pour tout $-\pi/2 \leqslant x < \pi/2$, on ait
$$|P(x) - \cos x| \leqslant 10^{-3}.$$

(Indication : 10! = 3.628.800)