Sorbonne Université
1M001 – Analyse et Algèbre pour les Sciences
Septembre–Décembre 2018.

Feuille d'exercices n$^\text{o}$ 8

Fonctions réciproques

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et dérivable. Prouvez ou donnez un contre-exemple à l'affirmation suivante : f admet une inverse $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est aussi dérivable.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + \cos x$. Montrer que f admet une inverse $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et ensuite calculer $g'(1)$.

Exercice 3. Déterminer les valeurs suivantes :

1. $\arcsin(1) - \arcsin(0)$.
2. $\arctan(1) - \arctan(-1)$.
3. $\cos(\arcsin(0,6))$.
4. $\sin(2\arcsin(0,6))$.

Exercice 4. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

1. Montrer que f établit une bijection entre $I =]-1, +1]$ et $J =]-\infty, 1/2]$.
2. Trouver la fonction réciproque $g : J \to I$ de f.
3. Quel est le sens de variation de g ?

Exercice 5. Dans cet exercice, on souhaite montrer comment les inverses de cosh, sinh et tanh peuvent être exprimées comme des logarithmes.

1. Calculer la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \ln(1 + \sqrt{x^2+1})$ et en suite montrer que $f = \operatorname{argsinh}$.
2. Soit $g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. Calculer $g'(x)$ pour tout $x > 1$, puis montrer que $g(x) = \operatorname{argcosh}(x)$ pour tout $x \geqslant 1$.

3. Soit $h :]-1, +1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$. Calculer $h'(x)$ pour tout $-1 < x < +1$, puis montrer que $h(x) = \operatorname{argtanh}(x)$.

Exercice 6. Soit $I = [0, \sqrt{2}[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$.

1. Montrer, sans calculer sa dérivée que f est strictement croissante sur I.
2. Déterminer $J = f(I)$.
3. Montrer que f admet une fonction réciproque continue $g : J \to I$.
4. Trouver un domaine sur lequel g est dérivable et, ensuite, déterminer g'.