

Devoir surveillé n° 1 – avec correction

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.

- L'épreuve est notée sur 20. Le total des points fait 28 et les notes ≥ 20 seront considérées comme 20.
- Vous devez justifier vos réponses au maximum.
- Les affirmations déraisonnables vous font perdre la confiance du correcteur : évitez-les.
- La qualité de votre travail compte plus que la quantité.
- Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. Soit

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

(1) Montrer que X est une 2-variété. (**1pts**)

(2) Construire un paramétrage

$$\varphi : U_0 \longrightarrow \underbrace{X \setminus P}_{X'},$$

où $P = \{1\} \times \mathbf{R}^2$ et $U_0 \subset \mathbf{R}^2$ est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ qu'on déterminera. (**4pts**)

Exercice 2. On identifiera $\mathbf{R}^6$ et l'ensemble des matrices réelles 3×2 . Soit M le sous-ensemble des matrices $X \in \mathbf{R}^6$ ayant rang 1, c'est-à-dire, les matrices X dont les colonnes engendrent une droite. Montrer que M est une 4-variété. (**7pts**)

Exercice 3. Soit

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \max(|x|, |y|, |z|) = 1\}.$$

En étudiant un voisinage de $p = (1, 1, 1)$, montrer que C n'est pas une 2-variété. (**6pts**)

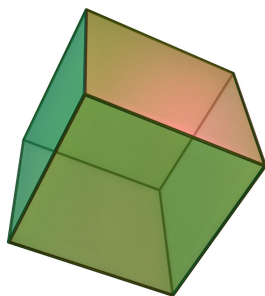


FIGURE 1 – L'ensemble C

Indication : Considérer les ouverts $U = \mathcal{U} \cap C$ et $V = \mathcal{V} \cap C$ de C , où $\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : |x| < 1, |y| < 1, z > 0\}$ et $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : |x| < 1, |z| < 1, y > 0\}$.

Exercice 4. Soient $N \geq 2$ un entier et $X \subset \mathbf{R}^N$ une variété de dimension $n = N - 2$, qui est de plus un *fermé* de $\mathbf{R}^N$. On souhaite étudier la connexité de l'ouvert $\Omega = \mathbf{R}^N \setminus X$.

- (1) Soit $R \subset \mathbf{R}^N$ un hypercube ouvert centré à l'origine, i.e. $R = (-r, +r)^{n+2}$, et $H = \mathbf{R}^n \times \{(0, 0)\}$. Montrer que $R \setminus H$ est connexe par chemins. **(3pts)**

Indication : Traiter d'abord schématiquement le cas $N = 2$ et $n = 0$.

- (2) Soit $x \in X$. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de x dans $\mathbf{R}^N$ tel que $\mathcal{U} \setminus X$ soit connexe par chemins. **(5pts)**
- (3) Soient $p, q \in \Omega$ distincts et soit $d : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^N$ défini par $d(t) = pt + (1 - t)q$. En *utilisant* que $X \cap d([0, 1])$ est fini, prouver que Ω est connexe par chemins. **(2pts)**