

Devoir surveillé n° 2 (1h30), 23 mars 2026

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.

- L'épreuve est notée sur 20. Le total des points fait 25 et les notes ≥ 20 seront considérées comme 20.
- Vous devez justifier vos réponses au maximum.
- Les affirmations déraisonnables vous font perdre la confiance du correcteur : évitez-les.
- La qualité de votre travail compte plus que la quantité.

Exercice 1. Soient $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 - z^2 - w^2$ et $g(x, y, z, w) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4w^2$. Montrer que

$$X = \{p \in \mathbf{R}^4 : f(p) = 0, g(p) = 1\}$$

est une 2-variété. Déterminer une base de $T_q X$, où $q = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$. (6pts)

Exercice 2. Soient $X \subset \mathbf{R}^N$ une variété, $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction lisse, et $p \in X$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ de p et une fonction lisse $F : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ telles que $F(x) = f(x)$ pour tout $x \in X \cap \Omega$. (4pts)

Exercice 3. Soit $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ une application linéaire symétrique, i.e. $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ pour chaque couple $v, w \in \mathbf{R}^n$. Soit $h(x) = \langle Ax, x \rangle$ et soit $p \in \mathbf{S}^{n-1}$ tel que

$$h(p) = \sup_{x \in \mathbf{S}^{n-1}} h(x).$$

- (1) Calculer $\partial_k h(x)$ pour chaque $k = 1, \dots, n$ et $x \in \mathbf{R}^n$. (2pts)
- (2) Montrer que p est vecteur propre de A . (5pts)
- (3) En déduire que A possède toujours un vecteur propre. (1pt)

Exercice 4. Comme d'habitude, nous identifions $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$. Notons $N = (0, 0, 1)$. Soit $\pi : \mathbf{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbf{C}$ la projection stéréographique et $\sigma : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{S}^2 \setminus \{N\}$ son inverse. On définit une fonction $f : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$ par

$$f(p) = \begin{cases} \sigma(\pi(p)^2 - 1), & \text{si } p \neq N \\ N. & \text{autrement} \end{cases}$$

- (1) Déterminer l'ensemble des points p tels que $f(p) = -N$. (1pt)
- (2) Déterminer un voisinage U de N sur lequel f est lisse. À toutes fins utiles : Si $\tilde{\pi} : \mathbf{S}^2 \setminus \{-N\} \rightarrow \mathbf{R}^2$ est la projection stéréographique à partir du sud, et $\tilde{\sigma} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2 \setminus \{-N\}$ est son inverse, alors $\pi\tilde{\sigma}(z) = \tilde{\pi}\sigma(z) = z/|z|^2 = 1/\bar{z}$. (4pts)
- (3) Exprimer $Df(N) : T_N \mathbf{S}^2 \rightarrow T_N \mathbf{S}^2$ dans la base de $T_N \mathbf{S}^2$ de votre choix. (2pts)