

Devoir surveillé n° 3 (2h00), 20 avril 2026

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.

- L'épreuve est notée sur 20. Le total des points fait 24 et les notes ≥ 20 seront considérées comme 20.
- Vous devez justifier vos réponses au maximum.
- Les affirmations déraisonnables vous font perdre la confiance du correcteur : évitez-les.
- La qualité de votre travail compte plus que la quantité.

Exercice 1. On identifiera $\mathbf{R}^6$ et l'ensemble des matrices réelles 3×2 . Soit X le sous-ensemble des matrices $A \in \mathbf{R}^6$ ayant rang 1, c'est-à-dire, les matrices A dont les colonnes engendrent une droite. On admettra que X est une variété de dimension 4.

- (1) La variété X , est-elle connexe par chemins ? Est-elle fermée dans $\mathbf{R}^6$? (**1pts**)
- (2) Soit $f : X \rightarrow \mathbf{R}^3$ la fonction qui à chaque $A \in X$ associe sa première colonne. Justifier brièvement le fait que f soit une fonction lisse. (**0,5pts**)
- (3) Déterminer $T_A X$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (**0,5pt**)
- (4) Déterminer les points critiques de f et, si A est un tel point, calculer $\text{rang } Df(A)$. (**3pts**)

Exercice 2. Soient X et Y des variétés, et soit $f : X \rightarrow Y$ une *submersion surjective*.

- (1) Montrer que pour tout $q \in Y$, il existe un voisinage ouvert $V \subset Y$ et une section lisse $s : V \rightarrow X$, i.e. s est lisse et pour chaque $y \in V$, l'on a $fs(y) = y$. (**4pts**)
- (2) Soit $\beta : Y \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction *arbitraire*. Montrer que si $\alpha := \beta f : X \rightarrow \mathbf{R}$ est *lisse*, alors β est également lisse. (**1pts**)

Exercice 3. Soit $X \subset \mathbf{R}^N$ une variété de dimension n . On dit qu'un hyperplan $P \subset \mathbf{R}^N$ est tangent à X si P contient $x + T_x X$ pour un certain $x \in X$. Un hyperplan qui n'est pas tangent est transversal. (En particulier, un hyperplan qui ne rencontre pas X est automatiquement transversal.) Dans la suite, $\mathcal{H}$ désigne l'ensemble $(\mathbf{R}^N \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}$ et pour $(h, c) \in \mathcal{H}$, on note $P_{h,c}$ l'hyperplan

$$\{x \in \mathbf{R}^N : h'(x) = c\}$$

où $h' : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ est la fonction $x \mapsto \langle h, x \rangle$.

- (1) Soient $TX^\perp = \{(x, v) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N : v \perp T_x X\}$, le fibré normal de X (vous pouvez supposer que $TX^\perp$ est une variété), et $Y \subset TX^\perp$ l'ouvert de $TX^\perp$ obtenu en ôtant $X \times \{0\}$. Soit $F : TX^\perp \rightarrow \mathbf{R}^{N+1}$ la fonction lisse (on l'admettra) $(x, v) \mapsto (v, \langle v, x \rangle)$. Montrer que $P_{h,c}$ est tangent à $X \Leftrightarrow (h, c) \in F(Y)$. **(3pts)**
- (2) Soit $\mathcal{B} = \{(h, c) \in \mathcal{H} : P_{h,c} \text{ est transversal}\}$. Montrer que $\mathcal{B} \neq \emptyset$. **(1pt)**
- (3) Soit $P_{h,c}$ un hyperplan transversal à X . Montrer que si $P_{h,c} \cap X \neq \emptyset$, alors $P_{h,c} \cap X$ est une variété de dimension $n - 1$. **(4pts)**

Exercice 4. Soit $X \subset \mathbf{R}^N$ une variété de dimension n et $TX \subset \mathbf{R}^{2N}$ son fibré tangent.

- (1) Soit $\varphi : U_0 \rightarrow U \subset X$ un paramétrage d'un ouvert $U \subset X$. Expliquer comment obtenir un paramétrage de $TX \cap U \times \mathbf{R}^N$ à partir de φ . (Vous n'avez pas besoin de montrer qu'il s'agit d'un paramétrage.) **(1pts)**
- (2) Soit $f : X \rightarrow \mathbf{R}^q$ une immersion. Montrer que $f' : TX \rightarrow \mathbf{R}^q$, définie par $f'(x, v) = Df(x) \cdot v$, est lisse. **(1pts)**
- (3) Utiliser la question précédente pour construire une immersion (pas forcément injective!) $h : X \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$. **(4pts)**