

Les pages suivantes sont le fruit d'une légère révision de mes notes pour le cours "Géométrie différentielle" du Master 1 de mathématiques fondamentales, délivré à Montpellier entre janvier et mai 2026. Ma présentation de la théorie est très proche à celle de [Mil] et [GP], qui doivent être consultées.

To get to grips with this question we have to appreciate that mathematics is a human activity and that it reflects the nature of human understanding. Now the commonest way of indicating that you have understood an explanation is to say "I see". This indicates the enormous power of vision in mental processes, the way in which the brain can analyse and sift what the eye sees.

M. F. Atiyah, dans What is Geometry?

Montpellier, Juillet 2026

João Pedro dos Santos.

Cours 1

(19 janvier 2026).

Rappels du calcul différentiel

Notation 1. Dans tout ce cours, $|v|$ désigne la norme euclidienne d'un vecteur $v \in \mathbf{R}^n$. Si $U \subset \mathbf{R}^n$ est ouvert et $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ est une fonction, on désigne par $\partial_k f(x)$ la k -ème dérivée partielle de f au point x , i.e. $\partial_k f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + te_k) - f(p)}{t}$. De même, pour $v \in \mathbf{R}^n$, on désigne par $\partial_v f$ sa dérivée directionnelle. Clairement $\partial_k f = \partial_{e_k} f$.

Soit $U \subset \mathbf{R}^n$ ouvert. $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ fonction. LA k -ème dérivée partielle de f est notée $\partial_k f$. On dit que f est *lisse* si $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k}(f)$ existe pour toute suite $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$.

Remarque 2. Il est possible de faire de la géométrie différentielle avec des fonctions moins dérivables.

On dit que $g : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ est dérivable au point $p \in U$ si

$$g(p + v) = g(p) + T(v) + r(v)$$

où

* $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ est linéaire, et

$$* \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

L'application linéaire T est la *dérivée* de f ; notation $T(v) = Df(p) \cdot v$.

Théorème 3 (Rappel). Soit $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbf{R}^m$. Sont équivalentes :

- (i) f est dérivable en tout $p \in U$ et la fonction $Df : U \rightarrow \mathbf{R}^{m \times n}$ est continue.
- (ii) Pour tout $v \in \mathbf{R}^n$, pour tout $p \in U$, la dérivée directionnelle $\partial_v f(p)$ existe et est continue sur U .
- (iii) $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ existent et sont continues comme fonctions $U \rightarrow \mathbf{R}^m$.

Démonstration. $i \Rightarrow ii$. Par définition

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = Df(p) \cdot v + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(tv)}{t} = Df(p) \cdot v$$

existe. Donc $\partial_v f(p)$ existe et vaut $Df(p) \cdot v$. Comme $p \mapsto Df(p)$ est continue et $M \mapsto M \cdot v$ est une fonction continue de $\mathbf{R}^{m \times n}$ dans $\mathbf{R}^m$, il suit que $p \mapsto \partial_v f(p)$ est continue.

$ii \Rightarrow iii$ est un cas particulier, où l'on pose $v = e_k$.

$iii \Rightarrow i$. On peut traiter que le cas $m = 1$. En effet, si $Df_i(p) \cdot v$ existe pour tout i, p et v , alors $Df(p) : v \mapsto (Df_1(p) \cdot v, \dots, Df(p) \cdot v)$ est une application linéaire telle que

$$f(p + v) - f(p) = Df(p) \cdot v + r(v)$$

où $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$. On suppose désormais $m = 1$ et on montre que f est dérivable. Soient $p = (p_1, \dots, p_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$. Soit

$$r(v) := f(p + v) - f(p) - \sum_{j=1}^n \partial_j f(p) v_j.$$

On applique les thm. des accroissements finis :

$$\begin{aligned} f(p_1 + v_1, \dots, p_n + v_n) - f(p_1, p_2, \dots, p_n) &= f(p_1 + v_1, \dots, p_n + v_n) - f(p_1, p_2 + v_2, \dots, p_n + v_n) + \\ &\quad + f(p_1, p_2 + v_2, \dots, p_n + v_n) - f(p_1, p_2, \dots, p_n + v_n) + \\ &\quad + \dots \\ &\quad + f(p_1, \dots, p_{n-1}, p_n + v_n) - f(p_1, p_2, \dots, p_n) \\ &= \partial_1 f(p_1 + \theta_1 v_1, p_2 + v_2, \dots, p_n + v_n) \cdot v_1 \\ &\quad + \partial_2 f(p_1, p_2 + \theta_2 v_2, \dots, p_n + v_n) \cdot v_2 + \\ &\quad + \dots \\ &= \partial_n f(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n + \theta_n v_n) \cdot v_n. \end{aligned}$$

Si $|(x_1, \dots, x_n)|_\infty = \max |x_j|$, alors pour des certains $q_1, \dots, q_n \in \mathbf{R}^n$ tels que $|p - q_j|_\infty \leq |v|_\infty$, l'on a

$$\frac{r(v)}{|v|} = \sum_{j=1}^n [\partial_j f(q_j) - \partial_j f(p)] \cdot \underbrace{\frac{v_j}{|v|}}_{\leq 1},$$

et $\frac{r(v)}{|v|} \rightarrow 0$ quand $v \rightarrow 0$ grâce à la continuité de $\partial_j f$.

□

Les résultats suivants sont fondamentaux :

Théorème 4 (Règle de la chaîne). Soient $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbf{R}^\ell$, avec f et g lisses. Alors $g \circ f$ est lisse et

$$D(g \circ f)(p) \cdot \vec{v} = Dg(f(p)) \cdot (Df(p) \cdot \vec{v}).$$

Théorème 5 (TIL). Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ lisse. On suppose $Df(p) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ inversible pour un certain $p \in U$. Alors il existe des voisinages $V \ni p$ et $W \ni f(p)$ tels que $f : V \rightarrow W$ est bijective et $f^{-1} : W \rightarrow V$ est lisse.

Remarque 6. Une application $f : U \rightarrow V$ entre ouverts t.q. f et f^{-1} sont lisses est un *difféomorphisme*. Une application $f : U \rightarrow V$ entre ouverts t.q. pour chaque $p \in U$, il existe des ouverts $p \in U'$ et $f(p) \in V'$ tels que $f : U' \rightarrow V'$ soit un difféomorphisme est dit un *difféomorphisme local*.

Exemple 7. Soit

$$\text{pol} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad (r, \theta) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

On a

$$D\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det = r.$$

Soit $U_a = \mathbf{R}_{>0} \times (a, a + 2\pi)$. Soit L_a la demi-droite $\{(r \cos a, r \sin a) : r > 0\}$ et $V_a = \mathbf{R}^2 \setminus L_a$. Alors pol est difféo entre U_a et V_a . *Remarque.* Tout le monde connaît les fonctions utilisées pour construire pol . Par contre, l'inverse

$$\text{pol}^{-1} : \mathbf{R}^2 \setminus \{(r \cos a, r \sin a) : r \leq 0\} \longrightarrow \mathbf{R}_{>0} \times (a, a + 2\pi)$$

n'a pas de nom célèbre!

Exercice 8 (Coordonnées cylindriques). Soit $\text{cyl} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$,

$$(r, \theta, z) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

Soit $U_a = \mathbf{R}_{>0} \times (a, a + 2\pi) \times \mathbf{R}$. Soit P_a le demi-plan $\{(r \cos a, r \sin a, z) \in \mathbf{R}^3 : r \geq 0\}$ et $V_a = \mathbf{R}^3 \setminus P_a$. Prouver que $\text{cyl} : U_a \rightarrow V_a$ est difféo. En particulier,

$$\text{cyl} : \mathbf{R}_{>0} \times (-\pi, +\pi) \times \mathbf{R} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \leq 0\}.$$

Cours 2

(26 janvier 2026).

Variétés

On commence avec un rappel. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Tout $X \subset E$ vient avec une topologie $\mathcal{T}_X = \{U \in \mathcal{P}(X) : U = \mathcal{U} \cap X \text{ pour un certain } \mathcal{U} \in \mathcal{T}\}$.

En particulier, tout $X \subset \mathbf{R}^N$ vient avec une topologie.

Convention 9. Tout voisinage est ouvert.

Définition 10. $X \subset \mathbf{R}^N$ est variété¹ de dimension n , ou n -variété, si pour tout $p \in X$, il existe un voisinage $U \ni p$ dans X , ouvert $U_0 \in \mathbf{R}^n$ et un homéomorphisme $\varphi : U_0 \rightarrow U$ jouissant des deux propriétés supplémentaires :

- (i) φ lisse, et
- (ii) pour tout $u \in U_0$, l'on a $\dim \text{Im } D_u \varphi = n$.

Terminologie 11. φ est un *paramétrage* et U est voisinage “paramétré”. 1-variété = *courbe*; 2-variété = *surface*. La différence $N - n$ est la *codimension*.

Remarque 12. Vérifier que φ est lisse et que $\dim D_u \varphi(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^n$ est normalement plus simple que vérifier que $\varphi : U_0 \rightarrow U$ est un homéomorphisme!

Exemple 13 (Le plan). Soient $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n \in \mathbf{R}^N$ linéairement indépendants.

Soit $X = p + \mathbf{R}\vec{w}_1 + \dots + \mathbf{R}\vec{w}_n$.

Soit $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^N$,

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto p + u_1 \vec{w}_1 + \dots + u_n \vec{w}_n.$$

Il est clair que φ est lisse, que $\text{Image } D_u \cdot \mathbf{R}^n = \mathbf{R}\vec{w}_1 + \dots + \mathbf{R}\vec{w}_n$ et que φ est bijective. Pour montrer que φ est un homéomorphisme entre $\mathbf{R}^n$ et X , on écrit l'inverse $\varphi^{-1} : x \mapsto (l_1(x - p), \dots, l_n(x - p))$ où $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n, \vec{w}_{n+1}, \dots, \vec{w}_N$ est une base de $\mathbf{R}^N$ et $l_1, \dots, l_N$ est la base duale.

Exemple 14 (Le cercle). $\mathbf{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ Il est utile d'employer les coordonnées polaires. Soit

$$\begin{aligned} \mathbf{pol} : \mathbf{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{(-r, 0) : r \geq 0\}, \\ (r, \theta) &\longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned}$$

Il s'agit d'un difféomorphisme entre ouverts euclidiens. On voit que

$$\varphi : (-\pi, +\pi) \longrightarrow \mathbf{S}^1 \setminus \{(-1, 0)\}, \quad \varphi(\theta) = \mathbf{pol}(1, \theta)$$

est homéomorphisme. Clairement φ est lisse et $\text{rg } D\varphi_\theta = 1$. Soit $R_\pi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \mathbf{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^2$ la rotation d'angle π . On voit que $R_\pi \varphi : (-\pi, +\pi) \rightarrow \mathbf{S}^1 \setminus \{(1, 0)\}$ est paramétrage.

1. On devrait ici choisir “sous-variété”. Mais on a choisi d'être économique.

Contre-exemple 15. Soit X la réunion des axes dans $\mathbf{R}^2$. On affirme que X n'est pas une 1-variété. Admettons le contraire. Soit $\varphi : U_0 \subset \mathbf{R} \rightarrow U$ un paramétrage d'un voisinage de $(0, 0)$. Par définition : $U = \mathcal{U} \cap X$ pour un ouvert euclidien $\mathcal{U}$.

On suppose $\varphi(0) = (0, 0)$ et $U_0 = (-\varepsilon, +\varepsilon)$. Alors $\varphi : (-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon) \rightarrow U \setminus \{(0, 0)\}$ est un homéomorphisme, mais $(-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)$ a deux composantes connexes tandis que $\mathcal{U} \cap X \setminus \{(0, 0)\}$ en a 4.

Exemple 16 (La Sphère). C'est : $\mathbf{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. C'est une 2-variété. On le montre de deux façons.

Paramétrage standard Soit $B = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ la boule ouverte unitaire.

$$\varphi_+(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) : B \rightarrow S^2 \cap \{z > 0\}.$$

$$D\varphi_+(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{pmatrix} \text{ de rang 2.}$$

De même pour les autres hémisphères :

$$\begin{aligned} \varphi_-(u, v) &= (u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2}), \\ \varphi_x^\pm(u, v) &= (\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v), \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Les réflexions (ex. $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$) montrent que les autres sont aussi des homéomorphismes sur leur image.

La projection stéréographique. Soit $N = (0, 0, 1) \in \mathbf{S}^2$.

Pour $p \in \mathbf{S}^2 \setminus \{N\}$, soit ℓ_p la droite $\overline{Np}$.

On définit

$$\pi : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \pi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right).$$

L'inverse $\sigma : \mathbf{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ est donné par

$$\sigma(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

Mnémonique : $\sigma(z) = \left(\frac{2z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$. On a $\pi \circ \sigma = \text{id}$ et $\sigma \circ \pi = \text{id}$. π est continue, σ est C^∞ , et $D\pi_{\sigma(u, v)} \circ D\sigma_{(u, v)} = I_2 \implies D\sigma$ injective.

Exemple 17 ("Le" tore). Soit C le cercle centré en $(2, 0, 0)$ dans le plan xz :

$$C = \{(2 + c, 0, s) \in \mathbf{R}^3 : c^2 + s^2 = 1\}.$$

On tourne $(2 + c, 0, s) \in C$ autour de l'axe z avec angle θ :

$$((2 + c) \cos \theta, (2 + c) \sin \theta, s).$$

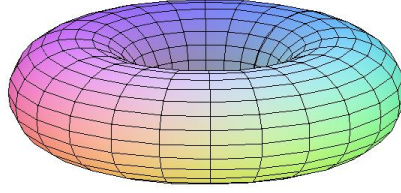


FIGURE 1 – Le tore

On construit

$$\Phi : (u, \theta) \longmapsto ((2 + \cos u) \cos \theta, (2 + \cos u) \sin \theta, \sin u).$$

Par définition :

$$\mathbf{T} = \Phi(\mathbf{R}^2)$$

est le tore. Clairement : Φ est lisse $\text{rg } D\Phi(u, \theta) = 2$ (calcul direct). Soit $C_{u_0, \theta_0} = (u_0, u_0 + 2\pi) \times (\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$. Donc

$$\begin{aligned} \Phi(C_{u_0, \theta_0}) &= \mathbf{T} \setminus \Phi(\{u_0\} \times \mathbf{R}) \cup \Phi(\mathbf{R} \times \{\theta_0\}) \\ &= \mathbf{T} \setminus \text{deux cercles.} \end{aligned}$$

Clairement un ouvert de $\mathbf{T}$ car complémentaire de deux cercles. *Affirmation* : $\Phi|_{C_{u_0, \theta_0}}$ est homéo sur son image. *Preuve*. Je traite le cas $u_0 = -\pi$ et $\theta_0 = -\pi$. On sait que

$$\text{cyl} : \mathbf{R}_{>0} \times (-\pi, +\pi) \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3 \setminus P, \quad (r, \theta, z) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

est difféo. Donc

$$\text{cyl}^{-1}(\Phi(u, \theta)) = (2 + \cos u, \theta, \sin u).$$

Soit $T(x, y, z) = (x - 2, z, y)$; c'est difféo $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$. On a

$$T \text{cyl}^{-1}(\Phi(u, \theta)) = (\cos u, \sin u, \theta).$$

Ensuite

$$\text{cyl}^{-1} T \text{cyl}^{-1}(\Phi(u, \theta)) = (1, u, \theta).$$

Donc $\Phi(u, \theta) = \text{cyl} T^{-1} \text{cyl}(1, u, \theta)$.

Cours 3

(2 février 2026).

Les Graphes

Soit $U_0 \subset \mathbf{R}^n$ ouvert et $f : U_0 \rightarrow \mathbf{R}^m$ lisse. On définit le graphe :

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m : x \in U_0, y = f(x)\}.$$

Alors Γ_f est une variété de dimension n . De plus, $\varphi : U_0 \rightarrow \Gamma_f$ est un paramétrage donné par

$$x \longmapsto (x, f(x)).$$

(Tout cela est évident.) Il est important de traiter les graphes dans plus de généralité. Soient $i_1 < \dots < i_n \in \{1, \dots, m+n\}$; on dénombre le complémentaire $\{1, \dots, m+n\} \setminus \{i_1, \dots, i_n\} = \{j_1 < \dots < j_m\}$. Soit $U_0 \subset \mathbf{R}^n$ ouvert. Alors on définit $\Gamma_f^{i_1, \dots, i_n}$ comme l'ensemble des $(x_1, \dots, x_{m+n}) \in \mathbf{R}^{m+n}$ tel que $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in U_0$ et où les coordonnées restantes sont données par f , i.e.

$$(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}) = f(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}).$$

Théorème 18. *Soit $N = m + n$. Soit $X \subset \mathbf{R}^N$ n -variété. Alors tout $p \in X$ possède voisinage $V \subset X$ telle que :*

- pour certains indices $i_1 < \dots < i_n \in \{1, \dots, m+n\}$,
- pour un voisinage ouvert $W_0 \subset \mathbf{R}^n$ de $(p_{i_1}, \dots, p_{i_n})$,
- pour fonction $h : W_0 \rightarrow \mathbf{R}^m$,

l'on peut écrire $V = \Gamma_h^{i_1, \dots, i_n}$.

Exemple 19. $p = (1, 0, 0) \in \mathbf{S}^2$. Soit $U = \{(x, y, z) \in \mathbf{S}^2 : x > 0\}$. On peut exprimer U comme graphe en résolvant $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, i.e. $U = \{(x, y, z) : x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}\}$.

Démonstration. $\varphi : U_0 \rightarrow U$ paramétrage d'un voisinage de p ; $p_0 = \varphi^{-1}(p)$. On sait que

$$\dim D_{p_0} \varphi(\mathbf{R}^n) = n.$$

Soit

$$\text{Jac}_{p_0}(\varphi) = \begin{bmatrix} \partial_1 \varphi_1(p_0) & \cdots & \partial_n \varphi_1(p_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \varphi_N(p_0) & \cdots & \partial_n \varphi_N(p_0) \end{bmatrix}$$

On sait qu'un mineur $n \times n$ de $\text{Jac}_{p_0}(\varphi)$ ne s'annule pas. On suppose, pour simplifier, que

$$\begin{vmatrix} \partial_1 \varphi_1(p_0) & \cdots & \partial_n \varphi_1(p_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \varphi_n(p_0) & \cdots & \partial_n \varphi_n(p_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Par TIL, $\tilde{\varphi} := (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : V_0 \rightarrow W_0$ est difféo. Soit $\psi : W_0 \rightarrow V_0$ l'inverse de $\tilde{\varphi}$. Soit $u \in W_0$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi\psi(u) &= (\underbrace{\varphi_1(\psi(u)), \dots, \varphi_n(\psi(u))}_{u \in W_0}, \varphi_{n+1}(\psi(u)), \dots, \varphi_N(\psi(u))) \\ &= (u, \underbrace{h(u)}_{\in \mathbf{R}^{N-n}}).\end{aligned}\tag{*}$$

Affirmation : $\varphi(V_0) = \{(u, v) \in W_0 \times \mathbf{R}^{N-n} : v = h(u)\} = \Gamma_h$. *Preuve.* En effet, tout $v \in V_0$ a la forme $\psi(u) \xRightarrow{(*)} \varphi(v) = (u, h(u)) \in \Gamma_h$, et si $(u, h(u)) \in \Gamma_h \Rightarrow u \in W_0$ et $\xRightarrow{(*)} \varphi(\psi(u)) = (u, h(u))$ et $(u, h(u)) \in \varphi(V_0)$.

La preuve est terminée en prenant $V = \varphi(V_0)$. $\square$

Exemple 20. Soit $X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_{\geq 0} : x^2 + y^2 = z^2\}$ le cône. Soit $\pi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ la projection $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. On voit que $\pi : X \rightarrow \mathbf{R}^2$ est homéo; l'inverse est $(u, v) \mapsto (u, v, \sqrt{u^2 + v^2})$. Par conséquent, X est homéomorphe à $\mathbf{R}^2$. On suppose que X est 2-variété. Par Théorème 18, il existe $U \subset X$ voisinage de $(0, 0, 0)$, $W_0 \subset \mathbf{R}^2$ voisinage de $(0, 0)$, tels que

$$U = \{(x, y, h(x, y)) : (x, y) \in W_0\},$$

$$U = \{(x, h(x, z), z) : (x, z) \in W_0\},$$

$$U = \{(h(y, z), y, z) : (y, z) \in W_0\}.$$

Dans le premier cas, il faudra que $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, qui est impossible parce que h n'est pas lisse. Dans le deuxième cas, l'on a $h(x, z)^2 = z^2 - x^2$ pour $(x, z) \in W_0 \Rightarrow h(\varepsilon, 0)^2 = -\varepsilon^2 \Rightarrow$ absurde. De façon similaire, troisième hypothèse est fausse aussi.

Variétés de niveau ou implicites

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ lisse.

Définition 21. Soit $p \in \Omega$.

(1) p est *point régulier* si

$$Df(p) : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^m \text{ est surjectif.}$$

(2) p est *point critique* si p n'est pas régulier.

(3) $c \in \mathbf{R}^m$ est *valeur critique* si $c = f(p)$, avec p critique.

(4) $c \in \mathbf{R}^m$ est *valeur régulier* si c n'est pas critique.

Attention : Si $c \notin \text{Im}(f)$, alors c est *automatiquement* régulier.

Exemple 22. Considérons $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ donnée par $f(x, y) = x^2 + y^2$. Alors

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix}.$$

- (i) $(0, 0) \in \mathbf{R}^2$ est l'unique point critique.
- (ii) 0 est l'unique valeur critique.
- (iii) -1 est une valeur régulière !

Théorème 23. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ lisse. Soit $c \in \mathbf{R}^m$ valeur régulière telle que $X = f^{-1}(c) \neq \emptyset$. Alors X est une variété de dimension $N - m$.

Interprétation : $\{f = c\}$ signifie qu'on impose les restrictions $f_1(x) = c_1, \dots, f_m(x) = c_m$ et donc on introduit « m contraintes » pour arriver à seulement « $N - m$ degrés de liberté ». Variétés de niveau = ensembles soumis à des contraintes lisses.

Exemple 24. Soit $f(x, y) = y^2 - x^3$. On a $\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} -3x^2 & 2y \end{bmatrix}$. On voit que si $c \neq 0$, alors $f^{-1}(c) = \{f = c\}$ est une variété.

Démonstration. On écrit $f = (f_1, \dots, f_m)$. Par définition, si $p \in X$ alors $Df(p) : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^m$ surjective $\Rightarrow \partial_1 f(p), \dots, \partial_N f(p)$ engendrent $\mathbf{R}^m$. On suppose que $\partial_1 f(p), \dots, \partial_m f(p)$ base.

Soit $F : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{N-m}$ définie par

$$x \mapsto (f(x), x_{m+1}, \dots, x_N).$$

Alors

$$\begin{aligned} \partial_1 F(p) &= (\underbrace{\partial_1 f(p)}_{\in \mathbf{R}^m}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\in \mathbf{R}^{N-m}}) \\ &\vdots \\ \partial_m F(p) &= (\underbrace{\partial_m f(p)}_{\in \mathbf{R}^m}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{\in \mathbf{R}^{N-m}}) \\ \partial_{m+1} f(p) &= (\underbrace{\partial_{m+1} f(p)}_{\in \mathbf{R}^m}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{\in \mathbf{R}^{N-m}}) \\ &\vdots \\ \partial_N f(p) &= (\underbrace{\partial_N f(p)}_{\in \mathbf{R}^m}, \underbrace{0, 0, \dots, 1}_{\in \mathbf{R}^{N-m}}) \end{aligned}$$

Ainsi $\{\partial_1 F(p), \dots, \partial_N F(p)\}$ est une base, donc $DF(p)$ est inversible.

Par TIL, existe voisinage rectangulaire $R \times S$ de $(c, p_{m+1}, \dots, p_N) = F(p)$ et voisinage $\mathcal{U} \ni p$ tel que

$$F : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} R \times S.$$

De plus,

$$F(X \cap \mathcal{U}) = \{c\} \times S.$$

Soit $G : R \times S \rightarrow \mathcal{U}$ l'inverse de F et soit $G_c : S \rightarrow \mathcal{U}$ la fonction $s \mapsto G(c, s)$. Alors

$$G_c : S \longrightarrow X \cap \mathcal{U}$$

est un homéomorphisme (son inverse est $F|_{X \cap \mathcal{U}}$), qui est lisse (évident) et tel que $D_s G_c \cdot \mathbf{R}^{N-m}$ est un sous-espace de dimension $N - m$, i.e. $D_s G_c : \mathbf{R}^{N-m} \rightarrow \mathbf{R}^N$ est injective. $\square$

Avec ce langage, on peut revenir sur le thème *des fonctions implicites*.

Définition 25. Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert et soient $f_1, \dots, f_m : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ lisses. On dira que ces fonctions sont *fonctionnellement indépendantes* quand $\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_m(p)$ sont linéairement indépendants pour tout $p \in \Omega$.

Exercice 26 (Théorème des fonctions implicites). Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert, $f_1, \dots, f_m : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ lisses fonctionnellement indépendantes. Soit $p \in \Omega$, et soient $c_i = f_i(p)$. Alors il existe un ouvert $U_0 \subset \mathbf{R}^{N-m}$, un ouvert euclidien $\mathcal{U} \ni p$ dans Ω et une fonction lisse $\varphi : U_0 \rightarrow \mathcal{U}$ telles que :

- (1) $f_i(\varphi(u)) = c_i$ pour tout i , et
- (2) Si $f_i(x) = c_i$, pour tout i , et $x \in \mathcal{U}$, alors $x = \varphi(u)$ pour un certain $u \in U_0$.

On termina en montrant que toute variété est finalement “implicite”.

Proposition 27. Soit $X \subset \mathbf{R}^N$ une n -variété. Alors pour tout $p \in X$, il existe un ouvert euclidien $\mathcal{U} \subset \mathbf{R}^N$ contenant p et une fonction $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}^{N-m}$ lisse, $c \in \mathbf{R}^{N-m}$ valeur régulière, telle que

$$X \cap \mathcal{U} = \{f = c\}.$$

Démonstration. Exercice. $\square$

Cours 4

(9 février 2026).

Théorème 28 (Redressement). *Soient $X \subset \mathbf{R}^N$ variété de dimension n et codimension m , et $p \in X$. Soit $\varphi : U_0 \rightarrow U$ un paramétrage d'un voisinage de p ; on note p_0 le point $\varphi^{-1}(p)$.*

Il existe

- (1) *voisinage euclidien $\mathcal{W}$ tel que $\mathcal{W} \cap X \subset U$,*
- (2) *un pavé ouvert R_0 centré en p_0 contenu dans U_0 ,*
- (3) *un pavé ouvert $S_0 \subset \mathbf{R}^m$ centré en 0 et*
- (4) *un difféomorphisme*

$$\Psi : \mathcal{W} \longrightarrow R_0 \times S_0$$

tels que

$$\Psi(\mathcal{W} \cap X) = R_0 \times \{0\}$$

De plus, si $\Psi = (\underbrace{\psi}_{\in R_0}, \underbrace{\dots}_{\in \mathbf{R}^m})$, alors $\psi : \mathcal{W} \cap X \rightarrow R_0$ est la restriction de φ^{-1} à $\mathcal{W} \cap X$.

Démonstration. On complète $\partial_1 \varphi(p_0), \dots, \partial_n \varphi(p_0)$ en une base en rajoutant $\beta_1, \dots, \beta_m$. Soit

$$\Phi : \underbrace{U_0 \times \mathbf{R}^m}_{\subset \mathbf{R}^N} \longrightarrow \mathbf{R}^N, \quad (u, y) \longmapsto \varphi(u) + y_1 \beta_1 + \dots + y_m \beta_m.$$

Clairement $D\Phi(p_0, 0) : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ est iso. TIL $\Rightarrow$ il existe

- ouvert euclidien $p_0 \in V_0 \subset U_0$,
- ouvert euclidien $0 \in B \subset \mathbf{R}^m$,
- ouvert euclidien $p \in \Omega \subset \mathbf{R}^N$

tels que $\Phi : V_0 \times B \rightarrow \Omega$ est difféo. Or, $\varphi(V_0) \subset X \cap \Omega$ est ouvert $\Rightarrow \varphi(V_0) = \mathcal{V} \cap X$, avec $\mathcal{V} \subset \Omega$.

De

$$\mathcal{V} \cap X = \varphi(V_0) = \Phi(V_0 \times 0)$$

il suit

$$\Psi(\mathcal{V} \cap X) = V_0 \times 0.$$

On écrit, pour $v \in \mathcal{V}$:

$$\Psi(v) = (\underbrace{\psi(w)}_{\in V_0}, \underbrace{\dots}_{\in \mathbf{R}^m}).$$

Si, de plus, $v \in \mathcal{V} \cap X$, l'on a $\Psi(v) = (\psi(v), 0)$ et donc

$$v = \Phi(\psi(v), 0) = \varphi\psi(v) \quad \Rightarrow \quad \psi(v) = \varphi^{-1}(v).$$

Pour terminer : Soit $R_0 \times S_0 \subset \Psi(\mathcal{V})$ pavé centré en $(p_0, 0)$ et $\mathcal{W} = \Phi(R_0 \times S_0) \subset \mathcal{V}$. On vérifie immédiatement que $\Psi(\mathcal{W} \cap X) = R_0 \times \{0\}$. □

Corollaire 29. Soit $\varphi : U_0 \rightarrow U$ paramétrage. Pour tout $p \in U$, il existe un ouvert euclidien $\mathcal{W} \ni p$ et une fonction lisse $\psi : \mathcal{W} \rightarrow U_0$ telle que $\psi(x) = \varphi^{-1}(x)$ pour tout $x \in X \cap \mathcal{W}$. $\square$

Corollaire 30. Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^k$ ouvert, $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^N$ lisse telle que $f(\Omega) \subset X$. Pour tout paramétrage $\varphi : U_0 \rightarrow U$, la fonction

$$f^{-1}(U) \xrightarrow{f} U \xrightarrow{\varphi^{-1}} U_0$$

est lisse. $\square$

Démonstration. Soit $p \in f^{-1}(U)$. Soit $p \in \mathcal{W}$ voisinage euclidien et $\psi : \mathcal{W} \rightarrow U_0$ lisse prolongeant $\varphi^{-1} : X \cap \mathcal{W} \rightarrow U_0$. Alors, pour $x \in f^{-1}(\mathcal{W})$, l'on a $\varphi^{-1}f(x) = \psi f(x) \Rightarrow \varphi^{-1}f$ est lisse sur $f^{-1}(\mathcal{W})$. $\square$

Corollaire 31 (Changement de paramétrages). Soient $\varphi : U_0 \rightarrow U$, $\psi : V_0 \rightarrow V$ paramétrages. Alors

$$\psi^{-1}(U \cap V) \xrightarrow{\varphi^{-1}\psi} \varphi^{-1}(U \cap V)$$

est un difféomorphisme ayant $\psi\varphi^{-1}$ pour inverse. $\square$

Corollaire 31 est *fondamental* par deux raisons : permet de faire de l'analyse sur les variétés et explique comment traiter les variétés abstraites.

Exemple 32. Soit $B = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1\}$. Soit $U = \{z > 0\}$ l'hémisphère nord de $\mathbf{S}^2$, qu'on paramètre par

$$\varphi : B \longrightarrow U \quad (u, v) \longmapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}).$$

Soit $V = \{y > 0\}$ l'hémisphère oriental qu'on paramètre par

$$\psi : B \longrightarrow V \quad (u, v) \longmapsto (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v).$$

Alors

$$\psi^{-1} \circ \varphi(u, v) = (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$$

est lisse sur $\varphi^{-1}(U \cap V) = \{(u, v) \in B : v > 0\}$.

Fonctions lisses sur les variétés

$X \subset \mathbf{R}^N$ est une n -variété.

Définition 33. Une fonction $f : X \rightarrow \mathbf{R}^\ell$ est *lisse autour de* $p \in X$ s'il existe un paramétrage $\varphi : V_0 \rightarrow U$ d'un voisinage de p tel que $f \circ \varphi : U_0 \rightarrow \mathbf{R}^\ell$ est lisse. f est lisse si elle est lisse autour de chaque point.

Dans la Déf. 33, il est question d'un paramétrage $\varphi : U_0 \rightarrow U$. Le fait que les changements de paramétrage soient des difféomorphismes permet de dire davantage :

Lemme 34. Si $f : X \rightarrow \mathbf{R}^\ell$ lisse et $\psi : V_0 \rightarrow V$ paramétrage, alors $f \circ \psi$ lisse.

Coeur de la démonstration. En effet,

$$f \circ \psi = f \circ \varphi \circ \underbrace{(\varphi^{-1} \circ \psi)}_{\text{difféo}}.$$

□

Exercice 35. Montrer que si $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^\ell$ est lisse sur un ouvert $\Omega \supset X$, alors la restriction $f|_X : X \rightarrow \mathbf{R}^\ell$ est aussi lisse.

Définition 36. Si $f : X \rightarrow \mathbf{R}^\ell$ est lisse et $\varphi : U_0 \rightarrow U$ paramétrage $\Rightarrow f \circ \varphi : U_0 \rightarrow \mathbf{R}^\ell$ est *expression locale* de f .

Cours 5

(17 février 2026).

Une autre conséquence du Thm. 28 est :

Corollaire 37. *Soit X une variété. Soit $f : X \rightarrow \mathbf{R}^\ell$ lisse. Alors pour tout $p \in X$, il existe voisinage euclidien $\Omega \ni p$ et $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^\ell$ telle que $\tilde{f}|_{X \cap \Omega} = f|_{X \cap \Omega}$.*

La preuve est laissé comme exercice.

Fonctions lisses entre variétés.

Définition 38. Soient $Y \subset \mathbf{R}^N$, $X \subset \mathbf{R}^M$ des variétés.

1. Une fonction $f : Y \rightarrow X$ est *lisse* si la composée

$$Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{\text{inclusion}} \mathbf{R}^M$$

est lisse. Une fonction lisse est un *morphisme de variétés*.

2. $f : Y \rightarrow X$ est un *difféomorphisme* si f est bijective lisse, et son inverse $g : X \rightarrow Y$ est aussi lisse.
3. $f : Y \rightarrow X$ est un *difféomorphisme local* si pour tout $q \in Y$ possède voisinage $V \subset Y$ tel que $f(V) = U$ est un ouvert et $f : V \rightarrow U$ est un difféo.

Les difféomorphismes sont les “identifications” de la géométrie différentielle. Ils permettent l’étude des variétés dans une classe de variétés difféomorphes.

Exemple 39. (i) Si $\varphi : U_0 \rightarrow U$ est un paramétrage, alors φ est un difféomorphisme. En effet, l’inverse $\psi : U \rightarrow U_0$ est lisse parce que $\psi \circ \varphi : U_0 \rightarrow U_0 \subset \mathbf{R}^N$ est lisse

(ii) Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}^1$ définie par $\theta \mapsto \text{cyl}(1, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Alors f est un difféomorphisme local ; en effet, la restriction de f aux intervalles $(a, a + 2\pi)$ est un difféo. sur $\mathbf{S}^1 \setminus f(a)$.

(iii) Si $X \subset \mathbf{R}^M$, $Y \subset \mathbf{R}^N$ sont des variétés, alors $X \times Y \subset \mathbf{R}^{M+N}$ est aussi une variété. On peut alors essayer de factoriser “les variétés”, i.e., déterminer quand une variété s’écrit comme un produit. Dans cette démarche, l’on a

Affirmation. Le tore $\mathbf{T}$ est difféomorphe à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. On construit

$$\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \xrightarrow{f} \mathbf{T}, \quad ((c, s); (\gamma, \sigma)) \mapsto ((2+c)\gamma, (2+c)\sigma, s).$$

Dit autrement,

$$f((c, s); (\gamma, \sigma)) = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\sigma & 0 \\ \sigma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_{\gamma, \sigma}} \begin{pmatrix} 2+c \\ 0 \\ s \end{pmatrix}.$$

Clairement f est la restriction à $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$ d'une fonction lisse $\tilde{f} : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$. De plus, par construction de $\mathbf{T}$ comme rotation d'un cercle, f est surjective. On montre que f est bijective. Parce que $(c, s) \mapsto (2 + c, 0, s)$ est injective et $R_{\gamma, \sigma} \in \text{SO}_3(\mathbf{R})$, alors

$$f : \mathbf{S}^1 \times \{(\gamma, \sigma)\} \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

est injective aussi. Or, si $(\gamma, \sigma) \neq (\gamma', \sigma')$, alors $f(\mathbf{S}^1 \times \{(\gamma, \sigma)\}) \cap f(\mathbf{S}^1 \times \{(\gamma', \sigma')\}) = \emptyset$ parce que si $p : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ est la projection sur les deux premières coordonnées, alors $pf((c, s); (\gamma, \sigma)) = ((2 + c)\gamma, (2 + c)\sigma)$ et $pf((c, s); (\gamma', \sigma')) = ((2 + c)\gamma', (2 + c)\sigma')$.

La preuve du fait que f^{-1} est lisse est plus simple avec le théorème d'inversion locale, qui viendra après.

Expression locale des morphismes de variétés

La définition de morphisme de variétés est trop dépendante de l'espace ambien $\mathbf{R}^N$. Il y a une autre façon plus intrinsèque qui est souvent utile.

Définition 40. Soient $X \subset \mathbf{R}^M$ et $Y \subset \mathbf{R}^N$ des variétés. Une fonction $f : Y \rightarrow X$ est lisse si pour tout $q \in Y$ d'image p , il existe un paramétrage $\psi : V_0 \rightarrow V \ni q$, un paramétrage $\varphi : U_0 \rightarrow U \ni p$, tels que

(i) $f(V) \subset U$

(ii) *l'expression locale* de f dans les paramétrages φ et ψ ,

$$\boxed{\varphi^{-1} f \psi} : V_0 \longrightarrow U_0,$$

est lisse.

Si (i)+(ii) $\Rightarrow (V, U)$ sont paramétrages *adaptés* à f . (Terminologie non-traditionnelle.)

Équivalence entre Déf. 38-(i) et Déf. 40. On suppose $Y \xrightarrow{f} X \rightarrow \mathbf{R}^M$ lisse. Soit $\psi : W_0 \rightarrow W$ paramétrage d'un ouvert de Y . Par définition, $f\psi : W_0 \rightarrow \mathbf{R}^M$ lisse $\Rightarrow$ continue. Soit $\mathcal{U}$ vois. euclidien de p ; on suppose de plus que $U := \mathcal{U} \cap X$ est paramétré par $\varphi : U_0 \rightarrow U$. Continuité de $f\psi \Rightarrow (f\psi)^{-1}(\mathcal{U})$ ouvert. Soit $V_0 \subset (f\psi)^{-1}(\mathcal{U})$ voisinage de $q_0 = \psi^{-1}(q)$. Alors $\psi(V_0) =: V \subset Y$ ouvert et $f(V) \subset U$ et (i) suit. La condition (ii) est conséquence du Cor. 30.

On suppose $\varphi : U_0 \rightarrow U$ et $\psi : V_0 \rightarrow V$ adaptés à f et l'on note $F = \varphi^{-1} f \psi : V_0 \rightarrow U_0$. Par définition $f\psi = \varphi F$ et

$$\underbrace{\varphi}_{\text{lisse}} \circ \underbrace{F}_{\text{lisse}} : V_0 \longrightarrow \mathbf{R}^M.$$

On arrive à la conclusion par Lemme 34. □

Exemple 41. Soit

$$\Phi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{T},$$

$$(u, v) \longmapsto ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 + \cos u \\ 0 \\ \sin u \end{pmatrix}.$$

On va construire $N : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{S}^2$ lisse comme suit : La restriction de Φ aux carrés $(a - \pi, a + \pi) \times (b - \pi, b + \pi)$ donne un paramétrage de $\mathbf{T}$ et Φ est difféo. local.

On observe que

$$\Phi(u, v) = \Phi(u', v')$$

si et seulement si $u - u' \in 2\pi\mathbf{Z}$ et $v - v' \in 2\pi\mathbf{Z}$. Donc, si $p = \Phi(x, y)$, alors $\Phi^{-1}(p)$ est l'ensemble des translations $(x, y) + (2\pi k, 2\pi \ell)$. On observe que

$$\partial_1 \Phi(u, v) = (\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin u \\ 0 \\ \cos u \end{pmatrix}$$

et

$$\partial_2 \Phi(u, v) = (-(2 + \cos u) \sin v, (2 + \cos u) \cos v, 0) = \begin{pmatrix} -\sin v & -\cos v & 0 \\ \cos v & -\sin v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 + \cos u \\ 0 \\ \sin u \end{pmatrix}.$$

Les fonctions de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{R}^3$

$$\Phi'_1(p) = \partial_1 \Phi(\text{point quelconque de } \Phi^{-1}(p))$$

et

$$\Phi'_2(p) = \partial_2 \Phi(\text{point quelconque de } \Phi^{-1}(p))$$

sont bien définies. Comme

$$\Phi'_1 \Phi(u, v) = (\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u),$$

et comme Φ est paramétrage quand restreinte à des ouverts convenables, la Définition 33 est satisfaite et Φ'_1 est lisse. Pareil pour Φ'_2 . De même,

$$N = -\frac{\Phi'_1 \times \Phi'_2}{|\Phi'_2 \times \Phi'_2|}$$

est lisse. (On se rappelle que $\partial_1 \Phi(u, v)$ et $\partial_2 \Phi(u, v)$ sont linéairement indépendants.) Comme $|N(p)| = 1$, on obtient ainsi une fonction lisse $N : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{S}^2$. Cette fonction joue un rôle fondamental en géométrie « métrique » car la variation de N permet de mesurer combien $\mathbf{T}$ est courbée.

Exercice 42. Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ lisses. Montrer que $g \circ f : X \rightarrow Z$ est lisse.

Cours 6

(23 février 2026).

Structures tangentes

$X \subset \mathbf{R}^N$ est variété de dimension n .

Définition 43. Soit $p \in X$. Un vecteur $v \in \mathbf{R}^N$ est *tangent* à X en p s'il existe une courbe $\alpha : \underbrace{(a, A)}_{\subset \mathbf{R}} \rightarrow X$ lisse telle que $\alpha(m) = p$ et $\alpha'(m) = v$ pour $m \in (a, A)$.

Dans le contexte de la définition, on dit que α passe par p avec vitesse v au moment m .

On note

$$T_p X = \{v \in \mathbf{R}^N : v \text{ est tangent à } X \text{ en } p\}.$$

Lemme 44. Soit $\varphi : U_0 \rightarrow U$ un paramétrage, $p \in U$, $p_0 = \varphi^{-1}(p)$. Alors

$$T_p X = \text{Image } D\varphi(p_0) : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^N.$$

En particulier $\dim_{\mathbf{R}} T_p X = n$.

Démonstration. Soit $\alpha : (a, A) \rightarrow X$ une courbe lisse qui passe par p avec $v = \alpha'(m)$ à l'instant m . On peut supposer que $\text{Image}(\alpha) \subset U$ (α est continue, donc $\alpha^{-1}(U)$ est ouvert). Cor. 30 $\Rightarrow$ $\varphi^{-1} \circ \alpha : (a, A) \rightarrow U_0$ est lisse. Par règle de la chaîne :

$$\begin{aligned} v &= \alpha'(m) \\ &= (\varphi \circ \alpha_0)'(m) \\ &= D\varphi(p_0) \cdot \alpha_0'(m) \\ &\in \text{Image } D\varphi(p_0). \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $v = D\varphi(p_0) \cdot v_0$. On prend la courbe $\alpha_0(t) = p_0 + tv_0$ (dans U_0) et $\alpha = \varphi \circ \alpha_0$ passe par p avec vitesse v au moment m . $\square$

Exemple 45. Si $P = p + \mathbf{R}\beta_1 + \cdots + \mathbf{R}\beta_n \subset \mathbf{R}^N$, alors

$$T_p P = \mathbf{R}\beta_1 + \cdots + \mathbf{R}\beta_n.$$

Mise en garde : $T_p X$ est un *sous-espace vectoriel*. Ne pas confondre avec $p + T_p X$, qui est un plan affine.

Exemple 46. Soit $p \in \mathbf{S}^n$. On suppose $p = (p_1, \dots, p_{n+1})$. Si $p_{n+1} > 0$, on sait que

$$B^n = \{u \in \mathbf{R}^n : |u| < 1\} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{S}^n, \quad u \longmapsto (u, \sqrt{1 - |u|^2})$$

est un paramétrage. En calculant $\partial_i \varphi(u)$, on déduit que

$$T_p \mathbf{S}^n = \text{engendré par } e_i - \frac{p_i}{\sqrt{1-|u|^2}} \cdot p \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

On a

$$\left\langle \left(e_i, -\frac{u_i}{\sqrt{1-|u|^2}} \right), (u, \sqrt{1-|u|^2}) \right\rangle = u_i - u_i = 0.$$

Donc

$$\boxed{T_p \mathbf{S}^n = p^\perp.}$$

L'espace tangent des variétés implicites

Proposition 47. Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^m$ lisse, soit $c \in f(\Omega)$ valeur régulière telle que $f^{-1}(c) \neq \emptyset$. Alors $X = f^{-1}(c) \subset \mathbf{R}^N$ est une variété de dimension $N - m$ et

$$T_p X = \ker Df(p).$$

Démonstration. On sait que $\dim T_p X = N - m$. Comme c est valeur régulière $\Rightarrow Df(p) : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^m$ est surjective $\Rightarrow \text{Ker } Df(p)$ a dimension $N - m$, qui est $\dim T_p X$.

Il suffit de prouver $T_p X \subset \text{Ker } Df(p)$. Cela se fait de manière simple : Soit $v \in T_p X$. Il existe une courbe lisse $\alpha : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow X$ avec $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. De plus, $f \circ \alpha : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow \mathbf{R}^m$ est constante ($= c$). Donc

$$(f \circ \alpha)'(0) = Df(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = 0 \implies v \in \text{Ker } Df(p).$$

□

Exemple 48. On sait pour $\mathbf{S}^n = \{f = 1\}$ où $f(x) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$. Donc $Df(p) = (2p_1, \dots, 2p_{n+1}) : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$. Donc

$$T_p \mathbf{S}^n = \{v \in \mathbf{R}^{n+1} : Df(p) \cdot v = 0\} = \{v \in \mathbf{R}^{n+1} : \langle p, v \rangle = 0\}.$$

Le plan tangent est très utile pour la

Optimisation sous contraintes

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert et $h : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ fonction. Soit $C \subset \Omega$ un sous-ensemble, qu'on appellera « ensemble de contraintes ». On souhaite étudier $\min_{p \in C} h(p)$ en employant la géométrie différentielle.

Hypothèse : $C = \{f_1 = \dots = f_m = 0\}$, où $f_1, \dots, f_m : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ sont lisses.

Définition 49. $p \in C$ est **régulier** (pour C) si $\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_m(p)$ sont linéairement indépendants.

Clairement, aucun conflit de terminologie est à craindre :

Lemme 50. $p \in C$ régulier $\Leftrightarrow p$ n'est pas point critique de

$$\Omega \xrightarrow{f=(f_1, \dots, f_m)} \mathbf{R}^m.$$

Démonstration. p n'est pas critique $\Leftrightarrow Df(p) : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^m$ surjective

$$\Leftrightarrow \text{rang} \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(p) & \cdots & \partial_N f_1(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(p) & \cdots & \partial_N f_m(p) \end{pmatrix} = m.$$

Les vecteurs $\nabla f_i(p)$ sont donc linéairement indépendants. □

On travaille dans la suite avec $C = \{f_1 = \cdots = f_m = 0\}$ un ensemble n'ayant que des points réguliers. En particulier, C est une variété de dimension $N - m$.

Proposition 51. Soit $h : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ lisse. Si $p \in C$ est point de minimum local soumis aux contraintes, alors

$$Dh(p) : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R} \text{ s'annule sur } T_p C.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{U} \subset \Omega$ voisinage de p tel que $h(p) \leq h(x)$ pour tout $x \in C \cap \mathcal{U}$. Soit $\alpha : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow U$ une courbe lisse passant par p avec vitesse $v \in T_p C$ au moment 0, i.e.

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = v.$$

Alors $h \circ \alpha : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow \mathbf{R}$ a un minimum en 0 $\Rightarrow$

$$(h \circ \alpha)'(0) = Dh(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = 0.$$

□

Terminologie 52. $p \in C$ est point stationnaire si $Dh(p)$ s'annule sur $T_p C$.

Exemple 53. On souhaite déterminer le triangle de périmètre fixé $p > 0$ ayant la plus grande aire. Soient a, b, c les longueurs des côtés, de sorte que $p = a + b + c$. Soit $\Omega = \mathbf{R}_{>0}^3$ et $f(a, b, c) = a + b + c - p$. On applique ici la formule de Héron pour le calcul de l'aire ; si $s = p/2$, alors

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = \text{aire}^2.$$

Soit $h : \mathbf{R}_{>0}^3 \rightarrow \mathbf{R}_0$ définie par

$$h(a, b, c) = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Le système de contraintes est régulier parce que $\nabla f = (1, 1, 1)$. On déduit les points stationnaires de h sous les contraintes C : comme

$$-\nabla h(x, y, z) = (s(s-y)(s-z), s(s-x)(s-z), s(s-y)(s-x)),$$

le point (x, y, z) est stationnaire $\Leftrightarrow$

$$-\langle \nabla h(x, y, z), \nabla f(x, y, z) \rangle = 0.$$

Ceci signifie que (x, y, z) est stationnaire $\Leftrightarrow \nabla h(x, y, z) \perp (1, 1, 1)$. Donc, (x, y, z) est stationnaire $\Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$-\nabla h(x, y, z) = (\lambda, \lambda, \lambda) \implies x = y = z.$$

Donc, l'unique point stationnaire est $(p/3, p/3, p/3)$ et les triangle équilatéral est mis sous la lumière. Notre raisonnement ne prouve pas que $(p, p, p)/3$ est un point de minimum global, mais avec un peu plus de travail ceci se démontre.

La Proposition 51 possède une formulation différente dans la littérature, que voici.

Proposition 54 (Extrema liés). *Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert, $f_1, \dots, f_m, h : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ lisses. Soit $C = \{f_1 = \dots = f_m = 0\} \subset \Omega$ un ensemble régulier de contraintes. Si $p \in C$ est minimum local $\implies$ il existe uniques $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R}$ tels que*

$$\nabla h(p) = \lambda_1 \nabla f_1(p) + \dots + \lambda_m \nabla f_m(p).$$

Démonstration. Si p est point de minimum local $\implies Dh(p) \cdot T_p C = \{0\}$. Or,

$$Dh(p) \cdot v = \langle \nabla h(p), v \rangle.$$

Donc p minimum local $\implies T_p C \perp \nabla h(p)$. Ensuite

$$\text{Jac}_p(f) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(p) \\ \vdots \\ \nabla f_m(p) \end{pmatrix} \implies T_p C = (\nabla f_1(p))^\perp \cap \dots \cap (\nabla f_m(p))^\perp$$

d'où $(\nabla f_1(p))^\perp \cap \dots \cap (\nabla f_m(p))^\perp$, ce qui équivaut, en prenant l'orthogonal, à

$$\mathbf{R} \nabla h(p) \subset \text{Vect}(\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_m(p)).$$

L'unicité dans l'énoncé est une conséquence de l'indépendance des gradients. □

Cours 7

(9 mars 2026).

La dérivée d'une fonction lisse

Soient $X \subset \mathbf{R}^M$ une m -variété et $Y \subset \mathbf{R}^N$ une n -variété, et $f : X \rightarrow Y$ lisse. Soit $p \in X$ et $f(p) = q$. Soient $\mathbf{v} \in T_p X$ et $\alpha : I \rightarrow X$ une courbe qui passe par p avec vitesse $\mathbf{v}$ à l'instant m , i.e. $\alpha'(t_0) = \mathbf{v}$. Soit $\beta(t) = f(\alpha(t))$. D'après l'Exercice 42, $\beta : I \rightarrow Y$ est lisse et $\beta(t_0) = q$.

Définition 55. $Df(p) \cdot \mathbf{v} = \beta'(t_0)$.

On doit vérifier que cette définition est indépendante de la courbe α choisie. Soient $\varphi : U_0 \rightarrow U$, $\psi : V_0 \rightarrow V$ des paramétrages adaptés aux points p_0 et q_0 et f , i.e. $f(U) \subset V$. Soit $F : U_0 \rightarrow V_0$ l'expression locale.

Proposition 56. Soit $\mathbf{v} \in T_p X$. Soit $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{R}^m$ tel que $D\varphi(p_0) \cdot \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$, où $p_0 = \varphi^{-1}(p)$. Soit $q = f(p)$ et $q_0 = \psi^{-1}q$. Alors

$$Df(p) \cdot \mathbf{v} = D\psi(q_0) \cdot \mathbf{w}_0$$

où $w_0 = DF(p_0) \cdot v_0$. Dit autrement : le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T_p X & \xrightarrow{Df(p)} & T_q Y \\ \uparrow D\varphi(p_0) & & \uparrow D\psi(q_0) \\ \mathbf{R}^m & \xrightarrow{DF(p_0)} & \mathbf{R}^n \end{array}$$

commute.

Dit autrement, $Df(p)$ est « grosso modo » la dérivée d'une l'expression locale de f .

Corollaire 57. (1) Si $\alpha : (a, A) \rightarrow X$ et $\bar{\alpha} : (\bar{a}, \bar{A}) \rightarrow X$ passent par p avec vitesse v aux instants t_0 et $\bar{t}_0$ respectivement, alors $\beta = f\alpha$ et $\bar{\beta} := f\bar{\alpha}$ passent par $f(p)$ avec vitesse $Df(p) \cdot v$ aux instants t_0 et $\bar{t}_0$.

(2) La dérivée $Df(p) : T_p X \rightarrow T_{f(p)} Y$ est linéaire.

Démonstration de la Proposition 56. On se donne $\alpha : (a, A) \rightarrow X$ passant par p avec vitesse v au moment t_0 . La continuité de α permet de trouver $(b, B) \subset (a, A)$ tel que $\alpha((b, B)) \subset U$. Soit $\alpha_0 = \varphi^{-1} \circ \alpha : (b, B) \rightarrow U_0$; on sait que α_0 est lisse. De plus, $\varphi\alpha_0 = \alpha \Rightarrow D\varphi(p_0) \cdot \alpha'(t_0) = v$ et $v_0 = \alpha'_0(t_0)$.

La règle de la chaîne donne :

$$\begin{aligned}
Df(p) \cdot v &\stackrel{\text{def}}{=} (f \circ \alpha)'(t_0) \\
&= (f(\varphi \circ \alpha_0))'(t_0) \\
&= (\psi \circ F \circ \alpha_0)'(t_0) \\
&= D\psi(F\alpha_0(t_0)) \cdot DF(\alpha_0(t_0)) \cdot \alpha'_0(t_0) \\
&= D\psi(q_0) \cdot DF(p_0) \cdot \alpha'_0(t_0) \\
&= D\psi(q_0) \cdot DF(p_0) \cdot v_0.
\end{aligned}$$

De plus,

$$Df(p) \cdot v = D\psi(q_0) \cdot DF(p_0) \cdot v_0.$$

En effet $\alpha'(t_0) = D\varphi(p_0) \cdot \alpha'_0(t_0)$ et $v_0 = \alpha'_0(t_0)$.

Donc : $Df(p) : T_p X \rightarrow T_q Y$ est linéaire. □

Avec cette définition, on peut prouver les 2 résultats fondamentaux pour la dérivée.

Théorème 58 (Théorème d'inversion locale). *Soit $f : X \rightarrow Y$ lisse. On suppose que pour $p \in X$, la dérivée $Df(p) : T_p X \rightarrow T_q Y$ soit un isomorphisme, où l'on a posé $q = f(p)$.*

Alors il existe $U \in \mathfrak{V}_X(p)$, $V \in \mathfrak{V}_Y(q)$ tels que $f : U \rightarrow V$ soit un difféomorphisme, i.e. bijectif et son inverse $f^{-1} : V \rightarrow U$ soit lisse.

Éléments de preuve. Soient $\varphi : U_0 \rightarrow U$, $\psi : V_0 \rightarrow V$ adaptées à f autour du point $p \in U$. Comme d'habitude, on écrit $p_0 = \varphi^{-1}p$ et $q_0 = \psi^{-1}q$. Alors

$$Df(p_0) : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

est isomorphisme. Le TIL assure l'existence de $U'_0 \in \mathfrak{V}_{U_0}(p_0)$ et $V'_0 \in \mathfrak{V}_{\mathbf{R}^n}(q_0)$ telles que $F(U'_0) = V'_0$ et $F|_{U'_0} : U'_0 \xrightarrow{\sim} V'_0$. Soit $G : V'_0 \rightarrow U'_0$ l'inverse de $F|_{U'_0}$. Alors

$$\psi(V'_0) \xrightarrow{f^{-1} = \varphi \circ G \circ \psi^{-1}} \varphi(U'_0)$$

est lisse. □

De façon similaire, on prouve :

Théorème 59 (Règle de la chaîne). *Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ lisses entre variétés. Alors*

$$D(g \circ f)(p) = Dg(q) \cdot Df(p).$$

Exemple 60. Revenons à l'Exemple 39(iii) ; soit $f : \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{T}$ définie par

$$((c, s), (\gamma, \sigma)) \mapsto ((2+c)\gamma, (2+c)\sigma, s).$$

On a déjà vu que f est lisse et bijective et on veut vérifier que $g := f^{-1}$ est aussi lisse. Il suffit ainsi de montrer que g est localement lisse, et par le Théorème d'inversion locale, il suffit de prouver que

$$Df(p) : T_p(\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1) \longrightarrow T_{f(p)}(\mathbf{T})$$

est bijective pour $p \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. Soient $(c_0, s_0) = (\cos t_0, \sin t_0)$, $(\gamma_0, \sigma_0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$. Soit $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \gamma_0, \sigma_0) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. Soient $\beta(\theta) = (c_0, s_0, \cos \theta, \sin \theta) \in \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$. On a

$$f\alpha : t \longmapsto ((2 + \cos t)\gamma_0, (2 + \cos t)\sigma_0, \sin t),$$

$$f\beta : \theta \longmapsto ((2 + c_0)\cos \theta, (2 + c_0)\sin \theta, s_0),$$

d'où

$$(f\alpha)'(t_0) = \underbrace{(-s_0\gamma_0, -s_0\sigma_0, c_0)}_v,$$

et

$$(f\beta)'(\theta_0) = \underbrace{(-(2 + c_0)\sigma_0, (2 + c_0)\gamma_0, 0)}_w.$$

On observe que $|v|^2 = 1$ et $|w|^2 = (2 + c_0)^2 \neq 0$ et que $v \perp w$. Donc la dimension de l'image de $Df((c_0, s_0), (\gamma_0, \sigma_0))$ est au minimum 2.

Cours 8

(16 mars 2026).

Le fibré tangent

$X \subset \mathbf{R}^N$ une n -variété.

Définition 61 (Fibré tangent). $TX = \{(x, t) \in X \times \mathbf{R}^N : t \in T_x X\} \subset \mathbf{R}^{2N}$.

En Physique, si X est l'espace de configurations d'un système (où nos particules vivent) alors TX est l'espace de phases (où la position et la vitesse y sont).

Exemple 62. $T(\mathbf{R}^N) = \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$.

Proposition 63. TX est une variété de dimension $2n$.

Démonstration. Soit $\varphi : U_0 \rightarrow U$ un paramétrage local de $U \subset X$. Soit $TU = \{(x, \mathbf{t}) \in U \times \mathbf{R}^N : \mathbf{t} \in T_x X\}$. Clairement $TU = (U \times \mathbf{R}^N) \cap TX$ est ouvert de TX . On sait que, pour $x \in U$, alors

$$T_x X = D\varphi(\varphi^{-1}(x)) \cdot \mathbf{R}^n.$$

Alors $(x, t) \in TU \Leftrightarrow t = D\varphi(\varphi^{-1}(x)) \cdot t_0$ pour un certain t_0 . Soit

$$\dot{\varphi} : U_0 \times \mathbf{R}^n \longrightarrow TU, \quad (u, t) \longmapsto (\varphi(u), D\varphi(u) \cdot t),$$

i.e.

$$(u, t_1, \dots, t_n) \longmapsto \left(\varphi(u), \sum_{i=1}^n \partial_i \varphi(u) \cdot t_i \right).$$

Cette dernière expression assure que $\dot{\varphi}$ est lisse. Elle assure également que $D(\dot{\varphi})(u, t)$ est injective, étant donné que

$$\partial_i \dot{\varphi}(u, t) = (\partial_i \varphi(u), \text{quelque chose})$$

et

$$\partial_{n+i} \dot{\varphi}(u, t) = (0, \partial_i \varphi(u))$$

pour $i = 1, \dots, n$.

Si $\dot{\varphi}(u, t) = \dot{\varphi}(v, s)$ alors $u = v$ (φ est injective) et $D\varphi(u) \cdot t = D\varphi(u) \cdot s \Rightarrow t = s$ parce que $D\varphi(u) : \mathbf{R}^n \rightarrow T_{\varphi(u)} X$ est bijective. On vient de s'assurer que $\dot{\varphi}$ est *injective*. La *surjectivité* est assez simple à vérifier.

$\dot{\varphi} : U_0 \times \mathbf{R}^n \rightarrow TU$ est notre candidate pour un paramétrage. On souhaite à présent prouver que $(\dot{\varphi})^{-1}$ est continue. On construira cette fonction à l'aide de l'inverse de φ .

Soit $p \in U$ fixé. Il existe $\mathcal{W}$ voisinage euclidien de p , $R_0 \subset U_0$ pavé ouvert de centre $\varphi^{-1}(p)$, et $\psi : \mathcal{W} \rightarrow R_0$ lisse tels que $\mathcal{W} \cap X \subset U$ et

$$\psi(x) = \varphi^{-1}(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathcal{W} \cap X.$$

Soit $(x, \mathbf{t}) \in TX$ tel que $x \in \mathcal{W}$. On construit, à l'aide de ψ , l'élément

$$\dot{\psi}(x, \mathbf{t}) := (\psi(x), D\psi(x) \cdot \mathbf{t}) \in R_0 \times \mathbf{R}^n;$$

on affirme que $\dot{\psi}(x, \mathbf{t})$ est $\dot{\varphi}^{-1}(x, \mathbf{t})$.

Comme $x \in X \cap \mathcal{W}$, on sait que $\varphi\psi(x) = x$. De plus, si $\alpha : (-\varepsilon, +\varepsilon) \rightarrow X \cap \mathcal{W}$ passe par x avec vitesse $\mathbf{t}$ au moment 0, l'on a $\varphi\psi(\alpha) = \alpha$ et la règle de la chaîne donne

$$D\varphi(\psi(x)) \cdot D\psi(x) \cdot \alpha'(0) = \underbrace{\alpha'(0)}_{\mathbf{t}}.$$

Dit autrement,

$$\dot{\varphi}(\dot{\psi}(x, \mathbf{t})) = (x, \mathbf{t}).$$

Comme $\dot{\psi}$ est clairement continue, la continuité de $\dot{\varphi}$ est démontrée. $\square$

Le fibré tangent en Physique

On se donne des particules $Q_1, \dots, Q_n$ de masses $m_1, \dots, m_n$ dans l'espace $\mathbf{R}^3$ et une force conservative $-\nabla U = F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$. On souhaite comprendre le mouvement des Q_i . La mécanique de Newton nous dit que si $q_i : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ est le mouvement de Q_i , alors

$$m_i q_i''(t) = F(q_i(t)).$$

Pour connaître la trajectoire, il nous faudra $q_i(0)$ ainsi que $q_i'(0)$, ainsi que déterminer les solutions des équations différentielles.

On suppose maintenant que les particules satisfont des contraintes spatiales (dites holonomes) : il existe des fonctions

$$h_j : \mathbf{R}^{3n} \longrightarrow \mathbf{R} \quad j = 1, \dots, r,$$

telles que $h_j(q_1(t), \dots, q_n(t)) = 0$, i.e. pour tout t , le point $\mathbf{q}(t) := (q_1(t), \dots, q_n(t))$ appartient à

$$C = \{x \in \mathbf{R}^{3n} : h_1(x) = \dots = h_r(x) = 0\}.$$

Si l'ensemble C est une variété, alors $(\mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t)) \in TC$.

Exemple 64. On suppose que $n = 2$ et que Q_1 et Q_2 sont liées par une barre de longueur ℓ . Donc, $r = 1$ et

$$h_1 : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}, \quad (x, y) \longmapsto |x - y|^2 - \ell^2.$$

Dans ce cas, C est difféomorphe à $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}^2$. On doit alors comprendre des courbes dans $T(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{S}^2) = \mathbf{R}^6 \times T(\mathbf{S}^2)$.

Il y a une difficulté intrinsèque ici. Les équations de Newton modélisent l'évolution du système dans l'espace, mais la présence des contraintes change le problème. Il faut ainsi faire appel à la mécanique de Lagrange, qui consiste à introduire une fonction $L : TC \rightarrow \mathbf{R}$. Plus de détails se trouvent dans le chapitre 4 de [A].

Cours 9

(23 mars 2026).

On continue notre étude du fibré tangent.

Exemple 65. On construit un difféomorphisme $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R} \xrightarrow{\sim} T\mathbf{S}^1$.

On sait que $T_{(c,s)}(\mathbf{S}^1) = \mathbf{R}(-s, c) = (c, s)^\perp$, i.e. tout vecteur tangent à $\mathbf{S}^1$ au point (c, s) est de la forme $\lambda(-s, c)$. Soit

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R} &\xrightarrow{F} \underbrace{T\mathbf{S}^1}_{\subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2} \\ (c, s, \lambda) &\longmapsto (c, s, -\lambda s, \lambda c) \end{aligned}$$

Il suit facilement que F est bijective.

Pour déterminer l'inverse, on observe que si $(c, s, -\lambda s, \lambda c) \in T\mathbf{S}^1$, alors

$$-s \cdot (-\lambda s) + c \cdot \lambda c = \lambda.$$

Donc

$$G : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}, \quad (c, s, u, v) \longmapsto (c, s, -s \cdot u + c \cdot v)$$

est telle que

$$G(F(c, s, \lambda)) = G(c, s, -\lambda s, \lambda c) = (c, s, \lambda s^2 + \lambda c^2) = (c, s, \lambda).$$

Donc $F^{-1} = G|_{\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}}$ est continue.

La construction précédente était possible parce que

$$\mathbf{w} : \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad (c, s) \longmapsto (-s, c)$$

est une fonction lisse telle que $\mathbf{w}(p) \in T_p \mathbf{S}^1$ pour chaque p .

Définition 66. Un champ de vecteurs sur une variété X est une fonction lisse $v : X \rightarrow \mathbf{R}^N$ t.q. $v(p) \in T_p X$ pour tout $p \in X$.

Le champ de vecteurs $\mathbf{w} : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ci-dessus possède une propriété supplémentaire : $\mathbf{w}(p)$ n'est jamais nulle.

Définition 67. Un point $p \in X$ est une singularité du champ $\mathbf{v}$ si $\mathbf{v}(p) = 0$.

Si l'existence de champs de vecteurs lisses est suffisamment anodyne, la non-annulation possède une racine profonde. En effet, on a vu que $\mathbf{w} : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$ n'a aucune singularité, par contre :

Théorème 68 (Théorème de la boule chevelue). *Soit $\mathbf{v} : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ un champ de vecteurs, où n est pair. Alors $\mathbf{v}$ possède au moins une singularité.*

Nous allons retourner à la théorie des champs de vecteurs plus tard.

Valeurs régulières et critiques. Immersions et submersions

On commence avec :

Exemple 69. Soit

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z^2 = -c_1 c_2\}$$

où $c_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ et $c_2(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. (Géométriquement X est construit en gonflant la couronne entre le cercle de rayon 1 et celui de rayon 2.) **DESSIN** On prouve que X est une 2-variété.

On coupe X avec le plan $\{x = \lambda\}$, i.e., on considère $X_\lambda := X \cap \pi^{-1}(\lambda)$, où $\pi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $(x, y, z) \mapsto x$.

- ★ Si $\lambda = 2 \Rightarrow X_\lambda = \{(2, 0, 0)\}$.
- ★ Si $\lambda = 1 \Rightarrow X_\lambda = \{(1, y, z) : z^2 + y^2(y^2 - 3) = 0\}$ est un « 8 ».
- ★ Si $\lambda = -1 \Rightarrow X_\lambda$ est encore un « 8 ».
- ★ Si $\lambda \in (-2, 2) \setminus \{\pm 1\} \Rightarrow X_\lambda$ est une variété.

Pourquoi une telle distinction de cas ? Soit $D\pi(p) : T_p X \rightarrow \mathbf{R}$. On sait que $D\pi(p) = \pi|_{T_p X}$. En effet, si $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$ passe par p avec vitesse $\mathbf{v}$ au moment 0, alors

$$(\pi\alpha)'(0) = D\pi(p) \cdot \mathbf{v} = \pi(\mathbf{v}).$$

Donc

$$D\pi(1, 0, 0)(T_{(1,0,0)}X) = \pi(\mathbf{Re}_2 + \mathbf{Re}_3) = 0.$$

Soient X et Y des variétés de dimension m et n respectivement.

Définition 70. Soient $f : X \rightarrow Y$ lisse, $p \in X$ et $q \in Y$.

- (1) Le point p est régulier si $Df(p) : T_p X \rightarrow T_{f(p)} Y$ est surjective.
- (2) Le point p est critique quand il n'est pas régulier.
- (3) Le point q est *valeur critique* quand il est l'image d'un point critique, et
- (4) q est valeur régulière quand il n'est pas critique (en particulier, si $q \notin f(X)$ alors q est valeur régulière).
- (5) Quand tout $x \in X$ est point régulier, on dit que f est une *submersion*.

Remarque 71. Si p est point régulier pour $f : X \rightarrow Y \Rightarrow \dim X \geq \dim Y$.

Théorème 72. Soit $q \in Y$ une valeur régulière. Alors $f^{-1}(q)$ est soit vide, soit une variété de dimension $\dim X - \dim Y$, contenue dans X .

Démonstration. On suppose q valeur régulière. On doit montrer que $f^{-1}(q)$ est une variété. Soit $p \in f^{-1}(q)$. Soient $\varphi : U_0 \rightarrow U$ et $\psi : V_0 \rightarrow V$ paramétrages adaptés à f , i.e. $f(U) \subset V$. On sait

que $F = \varphi \circ f \circ \psi^{-1} : U_0 \rightarrow V$ est lisse. De plus, on sait que

$$\begin{array}{ccc} T_p X & \xrightarrow{Df(p)} & T_q Y \\ \uparrow D\varphi(p_0) & & \uparrow D\psi(q_0) \\ \mathbf{R}^m & \xrightarrow{DF(p_0)} & \mathbf{R}^n \end{array}$$

commute. Il suit que $DF(p_0)$ est surjective : Si $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$, alors on choisit $\mathbf{u} \in T_p X$ t.q. $Df(p) \cdot \mathbf{u} = D\psi(q)\vec{v}$. Or, $\mathbf{u} = D\varphi(p_0) \cdot \mathbf{u}_0 \Rightarrow DF(p_0) \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{v}$.

Donc $F^{-1}(q_0)$ est une variété de dimension $m - n$ contenue dans U_0 . Soit $\xi : W_0 \rightarrow W$ paramétrage d'un ouvert $W \subset F^{-1}(q_0)$ contenant p_0 ; on suppose de plus que $\mathcal{W} \cap F^{-1}(q_0) = W$ avec $\mathcal{W} \subset U_0$ ouvert. On déduit facilement que

$$W_0 \xrightarrow{\xi} W \xrightarrow{\varphi} \varphi(W) = \underbrace{\varphi(\mathcal{W})}_{\text{ouvert de } X} \cap f^{-1}(q)$$

est un paramétrage. □

Exemple 73. Soit $\pi : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la projection vers la 1ère coordonnée. Alors tous les points de $\mathbf{S}^2 \setminus \{(\pm 1, 0, 0)\}$ sont réguliers. En effet $T_{(x,y,z)}\mathbf{S}^2 = (x, y, z)^\perp$ et $D\pi_{(x,y,z)}$ est la projection vers la 1ère coordonnée. Donc, $D\pi_{(x,y,z)} = 0$ seulement quand $(x, y, z)^\perp \subset \{0\} \times \mathbf{R}^2 \Leftrightarrow \mathbf{R}(x, y, z) \supset \mathbf{Re}_1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. On observe que $\pi^{-1}(\lambda)$ est un cercle de rayon $1 - \lambda^2$.

Cours 10

(30 mars 2026).

Forme locale des submersions

Toute submersion est localement $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$.

Précisément :

Théorème 74. *Soit $f : X \rightarrow Y$ submersion. Soit $p \in X$ et $q = f(p)$. Il existe paramétrages adaptés à f , $\varphi : U_0 \rightarrow U$ et $\psi : V_0 \rightarrow V$, tels que l'expression locale $\psi f \varphi^{-1} : U_0 \rightarrow V_0$ est la projection*

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n).$$

Démonstration. On commence avec des paramétrages adaptés :

$$\begin{array}{ccc} p & & A \xrightarrow{f} V \\ \uparrow & \alpha \uparrow & \uparrow \psi \\ p_0 & A_0 \xrightarrow{F} V_0 & \end{array}$$

D'après Prp. 56, $DF(p_0) : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ est surjective. On suppose en premier temps que $DF(p_0) : \mathbf{R}^n \times \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^n$ est bijective.

Soit $\Phi(x_1, \dots, x_m) = (F(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_m)$. Les dérivées partielles donnent :

$$\begin{aligned} \partial_1 \Phi(p_0) &= (\partial_1 F(p_0), \underbrace{0, \dots, 0}_{m-n}) \\ &\vdots \\ \partial_n \Phi(p_0) &= (\partial_n F(p_0), \underbrace{0, \dots, 0}_{m-n}) \\ \partial_{n+1} \Phi(p_0) &= (\text{qq chose}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{m-n}) \\ &\vdots \\ \partial_m \Phi(p_0) &= (\text{qq chose}, \underbrace{0, \dots, 0, 1}_{m-n}). \end{aligned}$$

Ces derniers vecteurs étant linéairement indépendants, l'on déduit que $D\Phi(p_0) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ inversible.

Par le TIL, on peut remplacer A_0 et A par des voisinages plus petits de p_0 p de sorte que $\Phi : A_0 \rightarrow B_0$ est un difféomorphisme, avec $B_0 \subset \mathbf{R}^m$ ouvert. Soit $\tilde{\Phi} = \Phi^{-1} \Rightarrow$

$$\Phi \circ \tilde{\Phi}(b_1, \dots, b_m) = (b_1, \dots, b_m).$$

Par définition de Φ :

$$F\tilde{\Phi}(b_1, \dots, b_m) = (b_1, \dots, b_n). \quad (\star)$$

On arrive au diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & V \\ \alpha \uparrow & & \uparrow \psi \\ A_0 & \xrightarrow{F} & V_0 \\ \tilde{\Phi} \uparrow & \nearrow F\tilde{\Phi} & \\ B_0 & & \end{array}$$

En prenant $\varphi = \alpha\tilde{\Phi}$, l'expression locale de f par rapport à φ et ψ est $F\tilde{\Phi}$, qui a la forme souhaitée d'après $(\star)$.

Suppression de l'hypothèse. Soit $K = \text{Ker } DF(p_0)$ et C un sous-espace complémentaire de K ; clairement $\dim K = m-n$ et $\dim C = n$. Soit $T : \mathbf{R}^m \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^m$ linéaire et telle que $T(\mathbf{R}^n \times \{0\}) = C$ tandis que $T(\{0\} \times \mathbf{R}^{m-n}) = K$. On introduit le nouveau paramétrage

$$T^{-1}(A_0) \xrightarrow{\beta = \alpha T} A.$$

L'expression locale de f est

$$\psi^{-1}f\beta = FT$$

et

$$D(FT)(T^{-1}(p_0)) = DF(p_0) \cdot T.$$

Dans ce cas, $D(FT)(T^{-1}(p_0))$ envoie $\mathbf{R}^n \times \{0\}$ bijectivement sur $\mathbf{R}^n$. $\square$

Corollaire 75. *Soit $f : X \rightarrow Y$ une submersion. Alors f est une fonction ouverte, i.e. pour tout ouvert $\Omega \subset X$, $f(\Omega)$ est ouvert dans Y .*

Démonstration. Soit $p \in X$. Par la forme locale, il existe des paramétrages $\varphi_p : U_{0,p} \rightarrow U_p$ et $\psi_p : V_{0,p} \rightarrow V_p$ tels que l'expression locale $F_p := \psi_p^{-1}f\varphi_p : U_{0,p} \rightarrow V_{0,p}$ soit la projection $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. Il est facile de voir que $F_p : U_{0,p} \rightarrow V_{0,p}$ est ouverte, car si $(b_1, \dots, b_m) \in U_{0,p}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que le pavé $\prod_{i=1}^m (b_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon) \subset U_{0,p}$, et son image par F_p est $\prod_{i=1}^n (b_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon)$. Donc $f(U_p) = \psi \circ F_p(U_{0,p})$ est ouvert dans Y . Pour un ouvert quelconque $\Omega \subset X$, on écrit $\Omega = \bigcup_{p \in \Omega} U_p \cap \Omega$, et

$$f(\Omega) = \bigcup f(U_p \cap \Omega)$$

est union d'ouverts, donc ouvert. $\square$

Théorème de Brown-Sard

Une propriété fondamentale de la géométrie (différentielle, analytique ou algébrique) est que l'ensemble de valeurs critiques est « petit ». Il peut-être très compliqué, néanmoins.

Si $f : X \rightarrow Y$ est lisse entre variétés, on écrit C_f pour désigner l'ensemble des points critiques de f . L'ensemble de valeurs réguliers, qui est $Y \setminus f(C_f)$, sera désigné par VR_f .

Théorème 76. *Soit $f : X \rightarrow Y$ lisse. Alors $f(C_f)$ a intérieur vide dans Y . ($\Leftrightarrow VR_f$ est dense.)*

La preuve qui suit vient de [Holm].² Elle fait multiples usages des théorèmes de Baire et de Lindelöf, que voici.

Théorème 77 (Baire). *Soient $\{F_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ des sous-ensembles fermées et d'intérieur vide dans $\mathbf{R}^n$. Alors $\bigcup_i F_i$ est d'intérieur vide.*

Théorème 78 (Lindelöf). *Soit $S \subset \mathbf{R}^n$ un ensemble quelconque et soit $\{U_i\}_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbf{R}^n$ telle que $\bigcup_i U_i \supset S$. Alors il existe un sous-ensemble dénombrable J tel que $\bigcup_{j \in J} U_j \supset S$.*

La preuve du Thm 76 est conséquence d'un cas particulier, que voici.

Théorème 79. *Soit $f : X \rightarrow \mathbf{R}^n$ lisse. Alors $\text{int } f(C_f) = \emptyset$ ($\Leftrightarrow VR_f$ est dense).*

Thm. 79 $\Rightarrow$ Thm. 76. Soit $f : X \rightarrow Y$ lisse, $f(C_f) \supset V$, avec $V \subset Y$ ouvert non-vide. Soit $q \in V$ et soit $\psi : W_0 \rightarrow W$ un paramétrage d'un $W \in \mathfrak{V}_V(q)$. Soit $g := \psi^{-1}f : f^{-1}(W) \rightarrow W_0$. Il suit que $g(C_g) = W_0$, en contradiction avec le Théorème 79 □

2. Elle est beaucoup plus compliquée que les résultats du présent cours ; pour cette raison, seulement une partie de cette démonstration a été traitée.

Cours 11

(10 avril 2026).

Démonstration du Thm. 79 quand $n = 1$. La preuve se fait en quelques étapes.

Étape 1. Si Thm 79 est vrai pour la l'hypercube ouvert $B = (-1, +1)^m$, alors il est vrai pour toute m -variété X .

Vérification. Soit $\{\varphi_k : B \rightarrow U_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ une famille de paramétrages couvrant X . Pour chaque $\ell \geq 2$, soit

$$\overline{B}_\ell = \left[-1 + \frac{1}{\ell}, +1 - \frac{1}{\ell} \right]^m.$$

Étant donné $x \in C_f$, il existe $k \in \mathbf{N}$ et $\ell \in \mathbf{N}^*$ tels que $x \in \varphi_k(\overline{B}_\ell)$. De plus,

$$\dim Df(x) \cdot T_x X = \dim D(f\varphi_k)(\varphi_k^{-1}(x)) \cdot \mathbf{R}^m$$

et donc $\varphi_k^{-1}(x) \in C_{f\varphi_k}$. Il suit que

$$f(x) \in f\varphi_k(C_{f\varphi_k} \cap \overline{B}_\ell).$$

Conclusion :

$$f(C_f) \subset \bigcup_{\substack{k \geq 0 \\ \ell \geq 2}} f\varphi_k(C_{f\varphi_k} \cap \overline{B}_\ell).$$

Par hypothèse, $\text{int } f\varphi_k(C_{f\varphi_k}) = \emptyset \Rightarrow f\varphi_k(C_{f\varphi_k} \cap \overline{B}_\ell)$ est compact et d'intérieur vide $\xRightarrow{\text{Baire}} f(C_f)$ est d'intérieur vide.

Étape 2. On fait une récurrence sur $m := \dim X$. Si $m = 0 \Rightarrow X$ est un ensemble dénombrable $\Rightarrow f(X)$ est dénombrable $\Rightarrow f(X)$ est d'intérieur vide (une boule ouverte n'est jamais dénombrable). On suppose maintenant que $m \geq 1$ et que pour toute variété Z de dimension strictement inférieure à m et toute fonction lisse $h : Z \rightarrow \mathbf{R}$, l'on a $\text{int } h(C_h) = \emptyset$. Dans ce contexte, on prouve :

Étape 3. Soit $B = (-1, +1)^m$ et $f : B \rightarrow \mathbf{R}$ lisse. Alors $\text{int } f(C_f) = \emptyset$.

Vérification. La preuve est basée sur une décomposition $C_f = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ et deux Lemmes, Lemme 80 et Lemme 81. Soit

$$C_k := \{x \in B : \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_\ell} f(x) = 0 \text{ pour } \ell \leq k\}.$$

Comme $Df(x) \cdot \mathbf{R}^m = \{0\}$ ou $\mathbf{R}$, alors $C_f = C_1$. De plus :

$$C_1 \supset C_2 \supset \cdots$$

Clairement, chaque C_k est *fermé*.

Lemme 80. $\text{int } f(C_k \setminus C_{k+1}) = \emptyset$ pour chaque $k \geq 1$.

Démonstration. Soit $x \in C_k \setminus C_{k+1}$. Toutes les dérivées d'ordre $\leq k$ de f s'annulent sur x , mais il existe une dérivée d'ordre $k+1$ qui ne s'annule pas. Dit autrement : Pour tout $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, m\}^k$, l'on a

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_\ell} f(x) = 0, \quad \text{si } \ell \leq k,$$

mais il existe $(j_1, \dots, j_{k+1}) \in \{1, \dots, m\}^{k+1}$ tel que $\partial_{j_1} \cdots \partial_{j_{k+1}} f(x) \neq 0$. Soit $g = \partial_{j_2} \cdots \partial_{j_{k+1}} f$. Comme $\partial_{j_1} g(x) \neq 0$, il existe $U \in \mathfrak{B}_B(x)$ tel que $\partial_{j_1} g(u) \neq 0$ pour chaque $u \in U$. Soit

$$Z := \{u \in U : g(u) = 0\};$$

c'est une $(m-1)$ -variété dans U . On remarque que $C_k \cap U \subset Z$. De plus, si $f_Z : Z \rightarrow \mathbf{R}$ désigne la restriction de f à Z , alors pour chaque $z \in C_k \cap U \subset Z$, l'on a $Df_Z(z) \cdot T_z Z \subset Df(z) \cdot \mathbf{R}^m = \{0\}$ et donc

$$C_k \cap U \subset C_{f_Z}.$$

Étant donné que $\dim Z < \dim X$, l'hypothèse de récurrence donne

$$f(C_k \cap U) \subset \underbrace{f_Z(C_{f_Z})}_{\text{intérieur vide}}. \quad (*)$$

Soit K_x une boule fermée de rayon strictement positif, centrée sur x et contenue dans U . De $(*)$
 $\Rightarrow$

$$f(C_k \cap K_x) \text{ est un compact d'intérieur vide.}$$

En conclusion : Pour tout $x \in C_k \setminus C_{k+1}$, il existe une boule compacte K_x , centrée sur x et contenu dans B , telle que

$$\text{int } f(C_k \cap K_x) = \emptyset.$$

Or, $\{\text{int } K_x\}_{x \in C_k \setminus C_{k+1}}$ est un recouvrement ouvert de $C_k \setminus C_{k+1}$ $\xRightarrow{\text{Lindelöf}}$ il existe $\{x_i\}_{i \in \mathbf{N}} \subset C_k \setminus C_{k+1}$ telle que

$$C_k \setminus C_{k+1} \subset \bigcup_i K_{x_i}.$$

Donc

$$f(C_k \setminus C_{k+1}) \subset \underbrace{\bigcup_i f(C_k \cap K_{x_i})}_{\text{intérieur vide}}.$$

□

Lemme 81. $\text{int } f(C_m) = \emptyset$.

Démonstration. Il s'agit d'une application intelligente de la formule de Taylor avec reste de Lagrange.

Soit $p \in C_m$. Soit

$$Q_p = \prod_{i=1}^m (a_i, a_i + \ell)$$

un cube ouvert contenant p et tel que $\overline{Q_p} \subset B$. On montre que $\mathbf{int} f(C_m \cap \overline{Q_p}) = \emptyset$. (Exercice : Ceci prouve le Lemme.) On suppose autrement : il existe ainsi un intervalle $[\alpha, \beta] \subset f(C_m \cap \overline{Q_p})$.

Soit

$$M = \max_{(i_1, \dots, i_{m+1}) \in \{1, \dots, m\}^{m+1}} \|\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_{m+1}} f\|_{\overline{Q_p}}.$$

Soit $d \in \mathbf{N}^*$; on décompose $[a_i, a_i + \ell]$ en d intervalles :

$$[a_i, a_i + \ell] = \left[a_i, a_i + \frac{\ell}{d} \right] \cup \cdots \cup \left[a_i + \frac{d-1}{d} \ell, a_i + \ell \right]$$

de sorte que Q_p est décomposé en d^m cubes, à savoir

$$\overline{Q_p} = \bigcup_{(k_1, \dots, k_m) \in \{1, \dots, d\}^m} \overline{Q_p}^{k_1, \dots, k_m}.$$

Chaque hypercube $\overline{Q_p}^{k_1, \dots, k_m}$ est de côté ℓ/d et donc pour chaque couple $x, y \in \overline{Q_p}^{k_1, \dots, k_m}$, l'on a

$$|x - y| \leq \frac{\ell\sqrt{m}}{d}.$$

Par le théorème des accroissements finis d'ordre m pour les fonctions réelles, l'on a

$$f(x) - f(y) = f(y) + Df(y) \cdot (x - y) + \cdots + \frac{D^m f(y)}{m!} \cdot (y - x)^m + \frac{D^{m+1} f(\theta)}{(m+1)!} \cdot (y - x)^{m+1}$$

où θ appartient au segment reliant x et y . Par conséquent :

$$|f(x) - f(y)| \leq 0 + \cdots + 0 + \frac{M}{(m+1)!} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{m}}{d} \right)^{m+1}.$$

Ceci signifie que $f(\overline{Q_p}^{k_1, \dots, k_m} \cap C_m)$ est contenu dans un intervalle fermé $J^{k_1, \dots, k_m}$ qui a longueur au plus

$$\frac{M}{(m+1)!} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{m}}{d} \right)^{m+1}.$$

Donc,

$$f(\overline{Q_p} \cap C_m) \subset \bigcup_{(k_1, \dots, k_m) \in \{1, \dots, d\}^m} J^{k_1, \dots, k_m}.$$

est contenu dans la réunion de d^m intervalles de longueur

$$\frac{M}{(m+1)!} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{m}}{d} \right)^{m+1}.$$

Donc,

$$\beta - \alpha \leq d^m \frac{M}{(m+1)!} \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{m}}{d} \right)^{m+1},$$

et ceci est impossible si $d \rightarrow +\infty$. □

La preuve du Théorème 79, dans le cas $n = 1$, suit finalement de l'inclusion

$$f(C_f) = f(C_1) \subset f(C_1 \setminus C_2) \cup \cdots \cup f(C_{m-1} \setminus C_m) \cup f(C_m).$$

□

Démonstration du Thm. 79 quand $n \geq 2$. On fait une récurrence sur n . On sait que Thm. 79 vrai pour $n = 1$. On suppose $n \geq 2$ et soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert non-vide. On doit montrer que $VR_f \cap \Omega \neq \emptyset$. Si $\Omega \setminus f(X) \neq \emptyset$, on choisit $y \in \Omega \setminus f(X)$ et donc $y \notin f(C_f)$, i.e. $y \in VR_f$. On suppose ainsi $\Omega \setminus f(X) = \emptyset$, i.e. $\Omega \subset f(X)$. Soit $\pi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ la projection sur les premières coordonnées. On sait que $\pi(\Omega)$ est ouvert $\xRightarrow{\text{récurrence}}$ il existe $y \in \pi(\Omega) \cap VR_{\pi f}$. Dit autrement, si $\pi f(x) = y \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{n-1} &= D(\pi f)(x) \cdot T_x X \\ &= D\pi(f(x)) \cdot Df(x) \cdot T_x X \\ &= \pi Df(x) \cdot T_x X \\ &\Rightarrow \\ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1} &\in Df(x) \cdot T_x X. \end{aligned}$$

Soit $Z = (\pi f)^{-1}(y)$; il s'agit d'une variété de dimension $m - (n - 1) \leq m - 1$. On observe que $L := \pi^{-1}(y) = \{y\} \times \mathbf{R}$ est une droite et que $Z = f^{-1}(L)$. De plus, $L \cap \Omega \neq \emptyset$. Soit $g : Z \rightarrow \mathbf{R}^n$ la restriction de f à Z : il s'agit de la composition de fonctions lisses $Z \rightarrow X \xrightarrow{f} \mathbf{R}^n$ et g est lisse. De plus, $g(Z) \subset L \Rightarrow g : Z \rightarrow L$ est lisse. Or, $L = \mathbf{R}$ et on peut faire appel au cas $n = 1$: l'ensemble $VR_g \subset L$ est dense. Donc, il existe $\tilde{y} \in VR_g$ dans l'ouvert $L \cap \Omega$. Par définition de L , l'on a $\pi(\tilde{y}) = y$. Soit $x \in X$ tel que $f(x) = \tilde{y}$. Donc $x \in Z$ et $Dg(x) \cdot T_x Z = \mathbf{R}\mathbf{e}_n$, i.e. il existe $\mathbf{v} \in T_x Z$ tel que $Dg(x) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}_n$. Or, $T_x Z \subset T_x X \Rightarrow \mathbf{e}_n \in Df(x) \cdot T_x X$. Donc $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n \subset Df(x) \cdot T_x X \Rightarrow \dim Df(x) \cdot T_x X = n \Rightarrow \tilde{y} \in VR_f$. □

Cours 12

(13 avril 2026).

Immersion

Définition 82. $f : X \rightarrow Y$ lisse est immersion si $Df(p) : T_p X \rightarrow T_{f(p)} Y$ est injective pour tout $p \in X$.

Exemple 83. Soit X une variété. $\varphi : U_0 \rightarrow U \subset X$ paramétrage. Alors $\varphi : U_0 \rightarrow \mathbf{R}^N$ est une immersion.

Exemple 84. $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}^1$, $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ est une immersion.

Exemple 85. Soit $f(t) = (t^2, t^3 - t)$. DESSIN On a

$$Df(t) \cdot \lambda = \lambda \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

et f est immersion.

On souhaite montrer que « Toute immersion est une inclusion d'un sous-espace vectoriel ».

Théorème 86. Soit $f : X \rightarrow Y$ une immersion, $p \in X$ d'image q . Il existe paramétrages $\varphi : U_0 \rightarrow U$ et $\psi : V_0 \rightarrow V$ des voisinages adaptés à $f : U \rightarrow V$ telles que l'expression locale de f est

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0).$$

Démonstration. Soit $\varphi : U_0 \rightarrow U$ et $\beta : B_0 \rightarrow B$ adaptés. Soit F l'expression locale. On voit que $DF(p_0) : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ est injectif. Soit

$$DF(p_0) \cdot \mathbf{e}_1, \dots, DF(p_0) \cdot \mathbf{e}_m, v_{m+1}, \dots, v_n$$

base. Soit

$$\tilde{F}(x, t_{m+1}, \dots, t_n) = F(x) + t_{m+1}v_{m+1} + \dots + t_nv_n.$$

On observe que $D\tilde{F}(p_0, 0, \dots, 0)$ est un isomorphisme. Soit $R_0 \subset U_0$ voisinage de p_0 , S_0 hypercube de $\mathbf{R}^{n-m}$ centré à l'origine et $V_0 \subset B_0$ ouvert centré en $q_0 := \beta^{-1}(q)$ tels que $\tilde{F} : R_0 \times S_0 \rightarrow V_0$ soit un difféomorphisme. On introduit

$$\begin{array}{ccccc} & & \psi & & \\ & \searrow & \text{arc} & \swarrow & \\ R_0 \times S_0 & \xrightarrow{\tilde{F}} & V_0 & \xrightarrow{\beta} & \beta(V_0). \end{array}$$

Comme $\beta F = f\varphi \Rightarrow$ pour tout $r \in R_0$, l'on a

$$f\varphi(r) = \beta F(r) = \beta \tilde{F}(r, 0) = \psi(r, 0).$$

$$\begin{array}{ccc}
\varphi(R_0) & \xrightarrow{f} & \beta(V_0) = \psi(R_0 \times S_0) \\
\uparrow \varphi & & \uparrow \psi \\
R_0 & \longrightarrow & R_0 \times S_0.
\end{array}$$

$$r \longmapsto (r, 0).$$

□

Question 87. Si $f : X \rightarrow Y$ est lisse, est-il vrai que $f(X)$ est une variété ?

Voici une première réponse :

Corollaire 88. Soit $f : X \rightarrow Y$ immersion. Soit $p \in X$. Il existe $U \in \mathfrak{V}_X(p)$ t.q. $f(U)$ soit variété de dimension $\dim X$.

Démonstration. Thm. 86 $\Rightarrow$ il existe paramétrages $\varphi : U_0 \rightarrow U$ de X et $\psi : V_0 \rightarrow V$ t.q.

$$\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{f} & V \\
\uparrow \varphi & & \uparrow \psi \\
U_0 & \xrightarrow{F} & V_0
\end{array}$$

avec $F(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m})$. Soit $\pi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ la projection. Il suit que $\pi F(u_0) = u_0$. Soit $W_0 = \{v_0 \in V_0 : \pi(v_0) \in U_0\}$ l'ouvert des points de V_0 dont la projection appartient à U_0 ; $\pi : W_0 \rightarrow U_0$ est surjective. Soit

$$\xi : U_0 \longrightarrow f(U)$$

$$u_0 \longmapsto \underbrace{\psi(u_0, 0)}_{f(\varphi(u_0))}.$$

(i) ξ est lisse.

(ii) $\partial_1 \xi(u_0), \dots, \partial_m \xi(u_0)$ sont l.i. parce que les vecteurs $\partial_1 \psi(u_0, 0), \dots, \partial_m \psi(u_0, 0)$ le sont.

(iii) $\xi : U_0 \rightarrow f(U)$ est bijective (facile).

(iv) $\xi^{-1}(y) = \pi \circ \psi^{-1}(y)$ et donc $\xi^{-1} : f(U) \rightarrow U_0$ est continue.

On a déduit un paramétrage de $f(U)$.

□

Doit-on conclure que la réponse à la Question 87 est toujours « oui » ?

Exemple 89. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, $t \mapsto (t^2, t^3 - t)$. On a DESSIN f est immersion car $Df(t) \cdot \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 - 1 \end{pmatrix} \neq 0$. Mais $f(\mathbf{R})$ n'est pas une variété !

L'exemple précédent, contredit-il Cor. 88 ? Non ! En effet, si $U = (0, +\infty) \Rightarrow f(U)$ est une variété. Doit-on conclure que la réponse à la Question 87 est « oui » au moins quand f est injective ? Dit autrement, les réponses négatives à Question 87, viennent-elles du défaut d'injectivité ?

Exemple 90. On garde les notations de l'exemple 89. Soit $I = (-1, +\infty)$; alors $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ est immersion injective et $f(I)$ n'est pas une variété. En effet, si $\Omega_\varepsilon = (1 - \varepsilon, +\varepsilon) \times (-\varepsilon, +\varepsilon)$ est voisinage de $f(1) = (1, 0)$ on voit que $\Omega_\varepsilon \cap f(I)$ n'est pas homéomorphe à un intervalle étant donné que $\Omega_\varepsilon \cap f(I) \setminus \{(1, 0)\}$ a au moins trois composantes connexes. **DESSIN**

Proposition 91. *On suppose que $f : X \rightarrow Y$ soit une immersion injective telle que $f : X \rightarrow f(X)$ soit un homéomorphisme ($f(X)$ vient avec la topologie induite par $Y \subset \mathbf{R}^N$). Alors*

- (1) $f(X)$ est variété de dimension $\dim X$
- (2) et $f : X \rightarrow f(X)$ est un difféomorphisme.

Esquisse de preuve. (1) Soit $q \in f(X)$ l'image de $p \in X$. Soit $U \in \mathfrak{V}_X(p)$ tel que $f(U)$ soit variété (cf. Cor. 88). Comme f est homéomorphisme, $f(U)$ est ouvert dans $f(X) \Rightarrow$ il existe $\mathcal{V} \subset \mathbf{R}^N$ ouvert tel que $f(U) = f(X) \cap \mathcal{V}$. Par définition de variété, il existe $\mathcal{W} \in \mathfrak{V}_{\mathbf{R}^N}(q)$ et paramétrage $\xi : W_0 \rightarrow f(U) \cap \mathcal{W} = f(X) \cap (\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$. Ceci montre que $f(X)$ est variété.

(2) est laissé au lecteur. □

La proposition met sous lumière une propriété importante.

Définition 92. $f : X \rightarrow Y$ est un **plongement** quand

- (1) f est immersion et
- (2) $f : X \rightarrow f(X)$ est homéomorphisme.

En utilisant le fait qu'une fonction continue et bijective entre espaces topologiques $\varphi : S \rightarrow T$ est homéomorphisme $\Leftrightarrow \varphi$ est ouverte $\Leftrightarrow \varphi$ est fermée, on déduit :

Proposition 93. *Soit $f : X \rightarrow Y$ immersion injective. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (1) f est plongement
- (2) $f : X \rightarrow f(X)$ est ouverte, i.e. si $U \subset X$ est ouvert, alors $f(U)$ est ouvert de $f(X)$.³
- (3) $f : X \rightarrow f(X)$ est fermée, i.e. si $F \subset X$ est fermé, alors $f(F)$ est fermé de $f(X)$.⁴

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2). Comme $X \rightarrow f(X)$ homéomorphisme, son inverse $g : f(X) \rightarrow X$ est continue. Soit $U \subset X$ ouvert. Alors $f(U) = g^{-1}(U)$ est ouvert par continuité de g .

(2) $\Rightarrow$ (3). Soit $F \subset X$ fermé et $U = X \setminus F$. Comme f est bijective, $f(U) = f(X) \setminus f(F)$. Comme $f(U)$ est ouvert de $f(X) \Rightarrow f(F)$ est fermé de $f(X)$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Aussi facile. □

3. Mise en garde : ceci ne signifie pas que $f : X \rightarrow Y$ est ouverte.

4. Mise en garde : ceci ne signifie pas que $f : X \rightarrow Y$ est fermée.

Corollaire 94. *Soit X compact et $f : X \rightarrow Y$ immersion injective. Alors f est plongement et $X \rightarrow f(X)$ est un difféomorphisme.*

Démonstration. Si X est compact et $F \subset X$ est fermé $\Rightarrow F$ est compact $\Rightarrow f(F)$ est compact $\Rightarrow f$ est fermée. $\square$

On souhaite maintenant utiliser la notion de plongement pour montrer que la dimension de l'espace euclidien où une variété habite peut être contrôlée.

Théorème 95 (Petit Théorème de Whitney). *$X = n$ -variété compacte. Alors il existe plongement $f : X \rightarrow \mathbf{R}^{2n+1}$.*

Ceci sera conséquence du

Théorème 96. *$X = n$ -variété. Soit $f : X \rightarrow \mathbf{R}^k$ immersion injective. On suppose $k \geq 2n + 1$. Alors il existe $\xi \in \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ tel que si $\pi_\xi : \mathbf{R}^k \rightarrow \xi^\perp = \mathbf{R}^{k-1}$ désigne la projection orthogonale, alors $\pi_\xi \circ f : X \rightarrow \mathbf{R}^{k-1}$ est immersion injective.*

Comme indique le dessin, l'idée derrière la preuve du Thm 96 est le fait qu'on peut faire une « radiographie » de notre variété! **DESSIN**

Cours 13

(20 avril 2026).

Preuve du Théorème 96. Soient

$$g : X \times X \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^k$$

$$(x, y, t) \longmapsto t \cdot (f(x) - f(y))$$

et

$$h : TX \longrightarrow \mathbf{R}^k$$

$$(x, \mathbf{v}) \longmapsto Df(x) \cdot \mathbf{v}.$$

Affirmation. g et h sont lisses.

Vérification. On s'occupe seulement de h . On suppose $X \subset \mathbf{R}^N$. Soit $\varphi : U_0 \rightarrow U$ paramétrage d'un ouvert $U \subset X$. Soit

$$\dot{\varphi} : U_0 \times \mathbf{R}^n \longrightarrow TX \cap (U \times \mathbf{R}^N)$$

$$(u_0, c_1, \dots, c_n) \longmapsto (\varphi(u_0), c_1 \partial_1 \varphi(u_0) + \dots + c_n \partial_n \varphi(u_0)).$$

On sait que $\dot{\varphi}$ est paramétrage de $TX \cap (U \times \mathbf{R}^N) = TU$, qui est ouvert de TX .

Comme $f : U \rightarrow \mathbf{R}^k$ lisse $\Rightarrow f \circ \varphi : U_0 \rightarrow \mathbf{R}^k$ est lisse, et

$$h(\dot{\varphi}(u_0, c_1, \dots, c_n)) = h \left(\varphi(u_0), \sum_{j=1}^n c_j \partial_j \varphi(u_0) \right)$$

$$\stackrel{\text{déf}}{=} Df(\varphi(u_0)) \cdot \left(\sum_{j=1}^n c_j \partial_j \varphi(u_0) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n c_j \cdot Df(\varphi(u_0)) \cdot \partial_j \varphi(u_0)$$

$$\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_j c_j \cdot \partial_j (f \circ \varphi)(u_0).$$

Cette dernière est une fonction lisse de $(u_0, c_1, \dots, c_n)$. Donc $h \circ \dot{\varphi} : U_0 \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ est lisse. L'affirmation est vraie.

On a $\dim TX = 2n < k$ et $\dim X \times X \times \mathbf{R} = 2n + 1 < k$. Donc, chaque $(x, \mathbf{v}) \in TX$ est critique pour h , et chaque $(x, y, t) \in X \times X \times \mathbf{R}$ est critique pour g . Par le Théorème de Morse-Sard $\Rightarrow g(X \times X \times \mathbf{R}) \cup h(TX)$ sont d'intérieur vide $\Rightarrow$ il existe $\xi \notin g(X \times X \times \mathbf{R}) \cup h(TX) \cup \{0\}$.

Affirmation : $\pi_\xi f : X \rightarrow \xi^\perp = \mathbf{R}^{k-1}$ est immersion injective. (N.B. $\ker \pi_\xi = \mathbf{R}\xi$)

Vérification :

Injectivité : Si $\pi_\xi f(x) = \pi_\xi f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) \in \mathbf{R}\xi \Rightarrow f(x) - f(y) = \lambda \xi$ pour $\lambda \in \mathbf{R}$. Si $\lambda = 0 \Rightarrow x = y$, étant donné que f injective. Si $\lambda \neq 0 \Rightarrow \xi = \lambda^{-1}(f(x) - f(y)) \in g(X \times X \times \mathbf{R})$, ce qui est exclu. Donc $x = y$.

« *Imersivité* » : Si $D(\pi_\xi f)(x) \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \pi_\xi(Df(x) \cdot \vec{v}) = 0 \Rightarrow Df(x) \cdot \vec{v} = \lambda \xi$. Si $\lambda \neq 0 \Rightarrow \xi = h(x, v/\lambda) \in h(TX)$, ce qui est exclu. Si $\lambda = 0$, l'injectivité de $Df(x)$ force $\vec{v} = 0$. $\square$

Remarque 97. Il existe une 2-variété compacte $\mathbf{P}^2$ qui ne peut pas être plongée dans $\mathbf{R}^3$.

Champs de vecteurs

Soit $X \subset \mathbf{R}^N$ une variété.

Définition 98. Un champ de vecteurs $\mathbf{v} : X \rightarrow \mathbf{R}^N$ est une fonction lisse telle que $\mathbf{v}(p) \in T_p X$ pour tout $p \in X$.

Exemple 99. Soit $X \subset \mathbf{R}^n$ ouvert. Les fonctions $x \mapsto \mathbf{e}_i$ sont des champs.

Exemple 100. Sur $\mathbf{S}^1$, nous savons que $T_p \mathbf{S}^1 = p^\perp$. Donc un champ tangent évident est :

$$\mathbf{v}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} p = \text{rotation de } p \text{ d'un angle } \pi/2.$$

Exemple 101. Soit $\varphi : U_0 \rightarrow U$ une paramétrisation locale de X . On définit les champs $\Delta_i^\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^N$ par

$$\Delta_i^\varphi(p) = \partial_i \varphi(\varphi^{-1}(p)).$$

Comme $\vec{\Delta}_i^\varphi(\varphi(u)) = \partial_i \varphi(u) \Rightarrow \vec{\Delta}_i^\varphi \circ \varphi : U_0 \rightarrow \mathbf{R}^N$ est lisse $\Rightarrow \Delta_i^\varphi : U \rightarrow \mathbf{R}^N$ lisse. Ces champs sont les « champs coordonnés » de φ . Après un certain entraînement, on supprime les « béquilles » et la notation préférée des géomètres est tout simplement $\partial/\partial u_i$, où $\varphi^{-1} = (u_1, \dots, u_n)$.

On voit facilement que si $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont des champs de vecteurs, alors $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ est aussi un champ de vecteurs. L'ensemble des champs de vecteurs est ainsi un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. De même, si $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ est lisse, alors $p \mapsto f(p)\mathbf{v}(p)$ est aussi un champ.

Notation 102. $\Gamma(X) = \{\text{champs de vecteurs de } X\}$. Il s'agit d'un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

Exercice 103. Montrer que $\Gamma(X)$ est finalement un $C^\infty(X)$ -module.

Localement, tous les champs sont décrits par les champs coordonnés $\vec{\Delta}_i^\varphi$.

Lemme 104. Soit $\mathbf{v} : X \rightarrow \mathbf{R}^N$ un champ. Soit $\varphi : U_0 \rightarrow U$ un paramétrage. Alors il existe des fonctions lisses $a_1, \dots, a_n : U \rightarrow \mathbf{R}$ telles que pour tout $p \in U$, l'on a

$$\mathbf{v}(p) = a_1(p)\Delta_1^\varphi(p) + \dots + a_n(p)\Delta_n^\varphi(p).$$

Démonstration. φ paramétrage $\Rightarrow \{\Delta_i^\varphi(p)\}_{i=1}^n \stackrel{\text{def}}{=} \{\partial_i \varphi(\varphi^{-1}(p))\}_{i=1}^n$ est base de $T_p X$. L'existence de fonctions a_i telles que

$$a_1(p)\Delta_1^\varphi(p) + \dots + a_n(p)\Delta_n^\varphi(p) = \mathbf{v}(p)$$

en découle. On doit prouver que chaque a_i est lisse, i.e. que $a_i \circ \varphi : U_0 \rightarrow \mathbf{R}$ est lisse.

Soient $p_0 \in U_0$ et $p = \varphi(p_0)$. Soit $\{w_1, \dots, w_m\} \subset T_p X^\perp$ une base. Alors

$$\{\partial_1 \varphi(p_0), \dots, \partial_n \varphi(p_0), w_1, \dots, w_m\}$$

est une base de $\mathbf{R}^N$. On considère la fonction $B : U_0 \rightarrow \mathbf{R}^{N \times N}$ définie par

$$B(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi(x) & \dots & \partial_n \varphi(x) & w_1 & \dots & w_m \end{pmatrix}.$$

On a $\det B(p_0) \neq 0$. Soit $V_0 \subset U_0$ l'ouvert où $\det B \neq 0$ et soit

$$A(x) = B(x)^{-1}, \quad \text{pour } x \in V_0.$$

En employant la formule $A(x) = \frac{1}{\det B(x)} \text{com}(B(x))^\top$, on voit que $A : V_0 \rightarrow \mathbf{R}^{N \times N}$ est lisse.

De plus,

$$B(x) \begin{pmatrix} a_1 \varphi(x) \\ \vdots \\ a_n \varphi(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}(\varphi(x)) \implies \begin{pmatrix} a_1 \varphi(x) \\ \vdots \\ a_n \varphi(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A(x) \mathbf{v}(\varphi(x)).$$

Il suit que les chaque $a_i \varphi : V_0 \rightarrow \mathbf{R}^N$ est lisse parce que $A : V_0 \rightarrow \mathbf{R}^{N \times N}$ et $\mathbf{v} \varphi : V_0 \rightarrow \mathbf{R}^N$ sont lisses. $\square$

Exemple 105 (Coordonnées polaires). Soit $\mathbf{v}$ le champ de l'exemple 100. Soit $U \subset \mathbf{S}^1$ l'hémisphère nord et $\varphi : (-1, +1) \rightarrow U$ la paramétrisation $u \mapsto (u, \sqrt{1-u^2})$. On a

$$\partial_1 \varphi(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\mathbf{v}(\varphi(u)) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-u^2} \\ -u \end{pmatrix} = \sqrt{1-u^2} \cdot \partial_1 \varphi(u).$$

Dit autrement : $\mathbf{v}(p) = y(p) \cdot \Delta_1^\varphi(p)$ où $y : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{R}$ est la deuxième coordonnée.

Cours 14

(27 avril 2026).

La dérivée de Lie et l'espace tangent « algébrique »

On fixe $X \subset \mathbf{R}^N$ une n -variété, p un point de X et $\mathbf{v} \in T_p X$. On fixe aussi $\varphi : U_0 \rightarrow U$ un paramétrage d'un voisinage de p et on écrit $p_0 = \varphi^{-1}(p)$. On adopte d'emblée la notation

$$\Delta_i := \partial_i \varphi(p_0).$$

DESSIN

Soient $V \in \mathfrak{V}_X(p)$ et $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ lisse. On obtient naturellement un réel :

$$Df(p) \cdot \mathbf{v} \in \mathbf{R}.$$

Changement de mentalité : Penser à $\mathbf{v}$ comme un *opérateur* associant à toute fonction lisse un réel : la dérivée directionnelle au point p .

Définition 106. La *dérivée de Lie* de f dans la direction $\mathbf{v}$ est $Df(p) \cdot \mathbf{v}$, et sera notée $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(f)$.

Remarque 107. $Df(p) : T_p X \rightarrow \mathbf{R}$ est linéaire $\Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbf{v} + \lambda \mathbf{w}} = \mathcal{L}_{\mathbf{v}} + \lambda \mathcal{L}_{\mathbf{w}}$.

Exemple 108. Soit X ouvert de $\mathbf{R}^N$. Alors pour chaque $p \in X$, on sait que $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^N$ est base de $T_p X$. De plus, $\mathcal{L}_{\mathbf{e}_i}(f) = \partial_i f(p)$.

Exemple 109. La dérivée de Lie n'est rien d'autre que « la dérivée directionnelle de l'expression locale ». Examinons les détails. Soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ lisse, ayant expression locale $f_\varphi : U_0 \rightarrow \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\Delta_i}(f) &\stackrel{\text{def}}{=} Df(p) \cdot \Delta_i \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\varphi(p_0 + t\mathbf{e}_i)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_\varphi(p_0 + t\mathbf{e}_i) \\ &= \partial_i f_\varphi(p_0). \end{aligned}$$

En particulier, si $\varphi^{-1} = (u_1, \dots, u_n)$, il est clair que chaque u_j est lisse puisque son expression locale $u_{j,\varphi}$ n'est rien d'autre que la projection $\pi_j : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$. Par conséquent,

$$\mathcal{L}_{\Delta_i}(u_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (1)$$

Pour cette raison, les géomètres préfèrent souvent la notation

$$\left. \frac{\partial}{\partial u_i} \right|_p = \mathcal{L}_{\Delta_i}.$$

De plus, si $\mathbf{v} = \sum_i c_i \Delta_i \Rightarrow$

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(f) = \sum_i c_i \partial_i f_\varphi(p_0) = \frac{\partial f_\varphi}{\partial(c_1, \dots, c_n)}(p_0).$$

Exercice 110. Soit $\mathbf{v} = \sum_i c_i \mathbf{\Delta}_i$. Alors $c_i = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(u_i)$, où $\varphi^{-1} = (u_1, \dots, u_n)$.

Définition 111. On note $C_p^\infty(X)$ la $\mathbf{R}$ -algèbre des fonctions $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ qui sont lisses *sur un voisinage de p* .

Dans cette définition, rien est admis sur la nature de f en tant que fonction sur X ! Même pas sa continuité !

Lemme 112. (1) La fonction

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}} : C_p^\infty(X) \longrightarrow \mathbf{R}$$

est linéaire et

(2) satisfait la règle de Leibniz :

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(fg) = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(g). \quad (\mathbf{L})$$

Démonstration. (1) Soit $\alpha : (a, A) \rightarrow X$ une courbe lisse qui passe par p avec vitesse $\mathbf{v}$ au moment m . Par définition, $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(f) = (f\alpha)'(m)$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et soit $h := f + \lambda g$. L'on a $h\alpha(t) = f\alpha(t) + \lambda g\alpha(t) \Rightarrow$

$$\underbrace{(h\alpha)'(m)}_{\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(f+\lambda g)} = \underbrace{(f\alpha)'(m)}_{\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(f)} + \lambda \underbrace{(g\alpha)'(m)}_{\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(g)}.$$

Ensuite, soit $\pi = f \cdot g$. On a $\pi\alpha(t) = f\alpha(t) \cdot g\alpha(t)$. La règle de Leibniz appliquée aux fonctions réelles $f\alpha$ et $g\alpha$ donne :

$$\underbrace{(\pi)'(m)}_{\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\pi)} = \underbrace{(f\alpha)'(m)}_{\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(f)} \cdot \underbrace{(g\alpha)(m)}_{g(p)} + \underbrace{(f\alpha)(m)}_{f(p)} \cdot \underbrace{(g\alpha)'(m)}_{\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(g)}.$$

□

Définition 113. Une *dérivation en p* est un élément $\delta \in C_p^\infty(X)^*$ satisfaisant $(\mathbf{L})$. L'ensemble des dérivations en p sera noté $L_p X$; c'est l'espace tangent algébrique de p .

Lemme 114. Soit $\delta : C_p^\infty(X) \rightarrow \mathbf{R}$ dérivation.

(1) Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, soit c_λ la fonction constante $c_\lambda(x) = \lambda$. Alors $\delta(c_\lambda) = 0$. (« δ annihile les constantes ».)

(2) Si $g, h \in \mathcal{D}_p(X)$ s'annulent sur p , alors $\delta(gh) = 0$.

Démonstration. (1) $c_1 \cdot c_1 = c_1 \Rightarrow \delta(c_1 \cdot c_1) = \delta(c_1) \stackrel{(\mathbf{L})}{=} 2\delta(c_1) = \delta(c_1) \Rightarrow \delta(c_1) = 0$. Ensuite $c_\lambda = \lambda \cdot c_1 \Rightarrow \delta(c_\lambda) = \lambda\delta(c_1) = 0$.

(2) C'est une conséquence directe de $(\mathbf{L})$.

□

Il n'est pas difficile de voir que $L_p X$ est un sous-espace de $C_p^\infty(X)^*$. De plus,

Lemme 115. *La fonction*

$$\mathcal{L} : T_p X \longrightarrow L_p X, \quad \mathbf{v} \longmapsto \mathcal{L}_{\mathbf{v}}$$

est un isomorphisme entre espaces vectoriels.

La preuve est laissée pour les compléments.

Compléments⁵

Démonstration du Lemme 115. On a déjà observé que $\mathbf{w} \mapsto \mathcal{L}_{\mathbf{w}}$ est linéaire.

Injectivité. On suppose $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(f) = 0$ pour tout $f \in C_p^\infty(X)$. On écrit $\mathbf{v} = \sum_i c_i \Delta_i$ de sorte que $\mathcal{L}_{\mathbf{v}} = \sum_i c_i \cdot \mathcal{L}_{\Delta_i}$ (cf. Remarque 107). Prenons comme dans l'exemple 109 la notation

$$\varphi^{-1} = (u_1, \dots, u_n).$$

De plus, on interprète u_j comme élément de $C_p^\infty(X)$ en choisissant $u_j(X \setminus U) = \{0\}$. Par le calcul de ce même exemple, l'on a

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(u_j) \\ &= \sum_i c_i \cdot \mathcal{L}_{\Delta_i}(u_j) \\ &= c_j. \end{aligned}$$

Ceci montre que $\mathbf{v} = 0$ et l'injectivité suit.

Surjectivité. C'est plus délicat à cause de l'analyse. Mais du point de vue algébrique, c'est assez simple. Soit $\delta \in L_p X$. On souhaite montrer que $\delta = \sum_i c_i \mathcal{L}_{\Delta_i}$. On écrit à nouveau

$$\varphi^{-1} = (u_1, \dots, u_n).$$

Pour alléger les notations, on va supposer de plus que $u_i(p) = 0$. On utilise le calcul fait à l'exemple 109 :

$$\mathcal{L}_{\Delta_i}(u_j) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (2)$$

Donc, si $\delta = \sum_i c_i \mathcal{L}_{\Delta_i}$, alors $\delta(u_j) = c_j$. Il nous faut ainsi montrer que δ et

$$\eta := \sum_{i=1}^n \delta(u_i) \mathcal{L}_{\Delta_i}$$

ont le même effet sur toutes les fonctions lisses. Grâce au Lemme 114, on voit que δ et η annulent les constantes et les fonctions « qui s'annulent en deuxième ordre », i.e. les fonctions gh , où $g(p) = h(p) = 0$. Grâce à l'éq. (2), l'on a

$$\delta(u_j) = \eta(u_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

5. Cette partie n'a pas été traitée en cours

Il suit que η et δ coïncident sur les fonctions polynomiales en $u_1, \dots, u_n$, et en particulier

$$\delta(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n) = \eta(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n). \quad (3)$$

Ceci fournit beaucoup d'évidence pour que la surjectivité soit vraie. Néanmoins, comme dit avant, l'analyse demande plus d'explications, et on aura besoin du

Lemme 116 (Lemme de Hadamard). *Soient $B \subset \mathbf{R}^n$ boule ouverte autour de l'origine et $f : B \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction lisse qui s'annule sur 0. Alors*

$$f(x) = x_1 F_1(x) + \dots + x_n F_n(x),$$

où chaque F_i est lisse. Précisément : Pour $x \in B$, on pose

$$F_i(x) := \int_0^1 \partial_i f(tx) dt.$$

Alors,

(1) chaque $F_i : B \rightarrow \mathbf{R}$ est lisse,

(2) pour tout $x \in B$ l'on a

$$f(x) = x_1 \cdot F_1(x) + \dots + x_n \cdot F_n(x).$$

On admet le Lemme de Hadamard et on continue la preuve. Soit $B \subset U_0$ boule ouverte autour de $p_0 = 0$. Par le Lemme de Hadamard appliqué à $f_\varphi = f\varphi$, pour $x \in B$, l'on a

$$f_\varphi(x) = f_\varphi(0) + \sum_{i=1}^n x_i \cdot F_i(x) \quad (*)$$

où chacune des fonctions F_i est lisse sur B . Soit $\hat{F}_i = F_i \varphi^{-1}$. En récrivant (*) sur l'ouvert $\varphi(B)$:

$$\begin{aligned} f - f(p) &= \sum_{i=1}^n u_i \cdot \hat{F}_i \\ &= \sum_{i=1}^n u_i \cdot \hat{F}_i(p) + \sum_{i=1}^n u_i \cdot (\hat{F}_i - \hat{F}_i(p)). \end{aligned}$$

Or, u_i s'annule sur p ainsi que $\hat{F}_i - \hat{F}_i(p) \xrightarrow{\text{Lem. 114}}$

$$\delta(f) = \delta \left(\sum_{i=1}^n \hat{F}_i(p) \cdot u_i \right).$$

De même,

$$\eta(f) = \eta \left(\sum_{i=1}^n \hat{F}_i(p) \cdot u_i \right),$$

et l'éq. (3) termine la preuve. □

On termine avec la

Démonstration du Lemme 116. Soit $r > 1$ tel que $rx \in B$. Soit $\alpha : (-r, +r) \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction $t \mapsto f(tx)$. La règle de la chaîne donne $\alpha'(s) = Df(sx) \cdot x = \langle \nabla f(sx), x \rangle$. Par le théorème fondamental du calcul,

$$\begin{aligned} \underbrace{\alpha(1)}_{f(x)} - \underbrace{\alpha(0)}_{f(0)} &= \int_0^1 \langle \nabla f(t \cdot x), x \rangle dt \\ &= \langle F(x), x \rangle \\ &= F_1(x)x_1 + \cdots + F_n(x) \cdot x_n. \end{aligned}$$

Le fait que $\partial_{i_r} \cdots \partial_{i_1} F$ existent est une conséquence de la dérivation sous l'intégrale.

□

Références

- [A] V. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*.
- [GP] V. Guillemin et A. Pollack, *Differential Topology*.
- [Mil] J. W. Milnor, *Topology from differentiable viewpoint*.
- [Holm] P. Holm, *The theorem of Brown and Sard*. L'Enseig. Math.