Université de Paris 6
Géométrie Différentielle Élémentaire
LM 326
Février–Juin 2011.

Première Session 2011

Les réponses doivent être soigneusement justifiées. L'interprétation des énoncés fait partie du devoir. Les téléphones portables et les calculatrices sont interdits.

Respirez, pensez, faites le meilleur que vous pouvez.

Exercice 1 (30%). Soit K le cercle de centre $(2, 0, 0)$ et rayon 1 dans le plan xz de $\mathbb{R}^3$, i.e. $K = \{(x, 0, z) : (x-2)^2 + z^2 = 1\}$. On écrit $K^* = K \setminus \{(1, 0, 0)\}$. Soient

$$S = \{(x \cdot c, x \cdot s, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, 0, z) \in K^*, \, c^2 + s^2 = 1\}$$

la surface de rotation obtenue en tournant K^* autour de l'axe z et C le cylindre $\{(2c, 2s, z) : c^2 + s^2 = 1\}$ obtenu en tournant la droite $L = (x = 2, y = 0)$ autour de l'axe z.

(i) Soit L la droite $\{(2, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Montrer que

$$p : K^* \to L, \qquad (r, 0, z) \mapsto \left(2, 0, \frac{z}{r-1}\right)$$

est un homéomorphisme (les topologies sont les topologies induites par $\mathbb{R}^3$). Vous pouvez utiliser un argument géométrique et la théorie faite dans le cours.

(ii) À l'aide de (i), construisez une application *bijective* $f : S \to C$.

(iii) Pour chaque point $q \in S$, choisissez des paramétrages $\varphi : U_0 \to S$ d'un voisinage de q et $\psi : V_0 \to C$ d'un voisinage de $f(q)$ et calculez l'expression locale de f. (Vous n'avez pas besoin de *montrer* que φ et ψ sont des paramétrages.) En déduisez que f est différentiable.
(iv) En déduisez que $Df(q) : T_qS \to T_{f(q)}C$ est toujours bijective.

Exercice 2 (25%). (i) Soit M la surface de rotation obtenue en tournant la courbe régulière (une partie de l'hyperbole $xz = 1$)

$$\beta : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3, \quad u \mapsto (u, 0, u^{-1})$$

autour de l'axe des z. Montrer que la projection $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ induit un difféomorphisme $M \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. (*Indication* : Montrer que M est le graphe d'une fonction.)

(ii) Montrer qu'il est impossible de trouver une isométrie entre M et $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Exercice 3 (20%). Soit S une surface régulière orientée par $\mathbf{N} : S \to \mathbf{S}$. ($\mathbf{S}$ est la sphère.)
(i) Justifier l'égalité $T_pS = T_{\mathbf{N}(p)}\mathbf{S}$.

(ii) Donner la définition de la deuxième forme fondamentale $\mathrm{II}_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ (par rapport à l'orientation $\mathbf{N}$).

(iii) Donner la définition des courbures principales.

(iv) Soit $\alpha : (a, A) \to S$ une courbe différentiable qui passe par p en $t = t_0$. Montrer que si $\alpha''(t)$ appartient à $T_{\alpha(t)}S$ pour chaque t, alors la courbure de Gauss de S en p est ≤ 0.

Exercice 4 (10%). (i) Soit S une surface régulière et $c : (a, A) \to S$ une courbe différentiable. Quel condition c doit remplir pour être une géodésique en (a, A) ?

(ii) Soit C le cylindre $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$. Pour simplifier, nous allons appeler une géodésique de C une courbe différentiable $\gamma : I \to C$, définie sur un intervalle ouvert non–spécifié, qui est une géodésique en I. Décrire toutes les géodésiques de C qui passent par $p = (1, 0, 0)$.

Exercice 5 (15%). Soit $\mathbb{C}P^2$ l'ensemble de droites complexes dans $\mathbb{C}^3$ qui passent par l'origine. Donner à $\mathbb{C}P^2$ une structure de variété différentielle de dimension 4.

Université de Paris 6
Géométrie Différentielle Élémentaire
LM 326
Février–Juin 2011.

Deuxième Session 2011

** Les téléphones portables et les calculatrices sont interdits.*
** Les réponses doivent être soigneusement justifiées.*
** L'interprétation et bonne compréhension des énoncés est une partie importante du devoir.*
** Cette épreuve est une évaluation globale, et vous pouvez perdre des points en faisant des affirmations fausses.*

Exercice 1 (15%). (i) Soit $\pi_+ : \mathbf{S} \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ la projection stéreographique à partir du pôle nord et $\pi_- : \mathbf{S} \setminus \{(0,0,-1)\} \to \mathbb{R}^2$ la projection à partir du pôle sud. Calculer ***explicitement***

$$\pi_+ \circ (\pi_-)^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

et

$$\pi_- \circ (\pi_+)^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

(ii) Trouver deux paramétrages locaux $\Phi : \mathbb{R}^2 \to U \subseteq \mathbf{S}$ et $\Psi : \mathbb{R}^2 \to V \subseteq \mathbf{S}$ tels que (1) $\mathbf{S} = U \cup V$ et (2) $\Phi^{-1} \circ \Psi$ et $\Psi^{-1} \circ \Phi$ soient des fonctions holomorphes.

Exercice 2 (25%). Soit $h : S \to S'$ un difféomorphisme entre deux surfaces régulières. Montrer que h est une isométrie si pour chaque courbe différentiable $c : (a, A) \to S$ et chaque $[b, B] \subseteq (a, A)$, l'égalité

$$\int_b^B |c'(t)|\, dt = \int_b^B |(h \circ c)'(t)|\, dt$$

est satisfaite. (Indication : Niez le fait que h est une isométrie pour obtenir une contradiction.)

Exercice 3 (30%). (i) Soient $\mathbf{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sphère, et $p = (0,0,1)$. On identifie $T_p\mathbf{S} = \mathbb{R} \cdot \vec{e}_1 + \mathbb{R} \cdot \vec{e}_2$ avec $\mathbb{R}^2$ de façon naturelle. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. En déduisez une expression ***explicite*** pour la géodésique $\gamma_{u,v} : \mathbb{R} \to \mathbf{S}$ qui passe par p avec vélocité (u,v) en $t = 0$.

(ii) Montrez qu'il existe un disque ouvert D centré à l'origine de $\mathbb{R}^2$ et un paramétrage $\Psi : D \to \mathbf{S}$ d'un voisinage ouvert de p tel que

$$\Psi(u,v) = \begin{cases} \gamma_{u,v}(1), & \text{où } \gamma_{u,v} \text{ est comme en (i) si } (u,v) \neq (0,0) \\ p, & \text{si } (u,v) = (0,0). \end{cases}$$

(Indication : Vous pouvez utiliser que les fonctions

$$f(u,v) = \frac{\sin\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \text{et} \quad g(u,v) = \cos\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$$

sont C^∞ et que

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 1, \\ g(0,0) &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial u}(0,0) &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial v}(0,0) &= 0, \end{aligned}$$

pour vous aider dans les calculs.)

(iii) Soient $h_1, h_2 : \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ deux isométries. Montrez, à l'aide de (ii), que si $h_1(p) = h_2(p)$ et $Dh_1(p) = Dh_2(p)$, alors $h_1 = h_2$ dans un voisinage ouvert de p.

Exercice 4 (30%). Soit

$$G = \{\text{plans (dimension 2) de } \mathbb{R}^4 \text{ qui passent par l'origine}\}.$$

Pour chaque couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i < j \leq 4$, on définit les fonctions (les mineurs)

$$M_{ij} : \mathrm{Mat}_{4\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \qquad \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix},$$

et on pose

$$U_{ij}^* = \left\{X \in \mathrm{Mat}_{4\times 2}(\mathbb{R}) \ : \ \det M_{ij}(X) \neq 0\right\},$$

et

$$U_{ij} = \left\{X \in \mathrm{Mat}_{4\times 2}(\mathbb{R}) \ : \ M_{ij}(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

On note $[X]$ le sous–espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les colonnes d'une matrice $X \in \mathrm{Mat}_{4\times 2}(\mathbb{R})$.

(i) Pour chaque couple $1 \leq i < j \leq 4$, on définit

$$V_{ij} = \{[X] \in G \ : \ X \in U_{ij}^*\}.$$

Montrez que

$$\bigcup_{1\leq i<j\leq 4} V_{ij} = G.$$

(ii) On définit, pour chaque couple $1 \leq i < j \leq 4$, les fonctions Φ_{ij} comme suit

$$\Phi_{ij} : U_{ij} \to G, \qquad X \mapsto [X].$$

Montrez que $V_{ij} = \Phi_{ij}(U_{ij})$.

(iii) Montrez que Φ_{ij} est injective.

(iv) Montrez que

$$\Phi_{ij}^{-1}(V_{ij} \cap V_{kl}) = \{X \in U_{ij} \ : \ \det M_{kl}(X) \neq 0\}.$$

(v) On identifie chaque U_{ij} avec $\mathbb{R}^4$. Construisez une structure de variété différentielle en G pour laquelle chaque $\Phi_{ij} : U_{ij} = \mathbb{R}^4 \to V_{ij}$ est un paramétrage.

Formules utiles : (a) Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont des vecteurs colonne de $\mathbb{R}^4$, alors

$$(\vec{x} \quad \vec{y}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a \cdot \vec{x} + c \cdot \vec{y} \qquad b \cdot \vec{x} + d \cdot \vec{y}).$$

Donc X et X' engendrent le même plan si et seulement si il existe une matrice $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $X' = X \cdot g$.

(b) Si $X \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, et $g \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, alors

$$M_{ij}(X \cdot g) = M_{ij}(X) \cdot g.$$