Université de Paris 6
Géométrie Différentielle Élémentaire
LM 326
Février–Juin 2011.

Première Session 2011

Les réponses doivent être soigneusement justifiées. L'interprétation des énoncés fait partie du devoir. Les téléphones portables et les calculatrices sont interdits.

Respirez, pensez, faites le meilleur que vous pouvez.

Exercice 1. Soit K le cercle de centre $(2,0,0)$ et rayon 1 dans le plan xz de $\mathbb{R}^3$, i.e. $K = \{(x,0,z) : (x-2)^2 + z^2 = 1\}$. On écrit $K^* = K \setminus \{(1,0,0)\}$. Soient

$$S = \{(x \cdot c, x \cdot s, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,0,z) \in K^*,\ c^2 + s^2 = 1\}$$

la surface de rotation obtenue en tournant K^* autour de l'axe z et C le cylindre $\{(2c, 2s, z) : c^2 + s^2 = 1\}$ obtenu en tournant la droite $L = (x = 2, y = 0)$ autour de l'axe z.

(i) Soit L la droite $\{(2,0,z) \ : \ z \in \mathbb{R}\}$. Montrer que

$$p : K^* \to L, \qquad (x,0,z) \mapsto \left(2, 0, \frac{z}{x-1}\right)$$

est un homéomorphisme (les topologies sont les topologies induites par $\mathbb{R}^3$). Vous pouvez utiliser un argument géométrique et la théorie faite dans le cours.

(ii) À l'aide de (i), construire une application *bijective* $f : S \to C$.

(iii) Pour chaque point $q \in S$, choisissez des paramétrages $\varphi : U_0 \to S$ d'un voisinage de q et $\psi : V_0 \to C$ d'un voisinage de $f(q)$ et calculez l'expression locale de f. (Vous n'avez pas besoin de *montrer* que φ et ψ sont des paramétrages.) En déduisez que f est différentiable.
(iv) En déduisez que $Df(q) : T_qS \to T_{f(q)}C$ est toujours bijective.

Corrigé. (i) p est simplement une projection stéréographique. Voir la figure 1.

(ii) Soit $(x,y,z) \in S$ et $r = \sqrt{x^2+y^2}$, donc $(x,y,z) = (r \cdot (x/r), r \cdot (y/r), z)$, et $(x/r)^2 + (y/r)^2 = 1$. En plus, $(r,0,z) \in K^*$, par définition. Il suit que $(r,0,z) \neq (1,0,0)$. On définit

$$f(x,y,z) = \left((x/r) \cdot 2, (y/r) \cdot 2, \frac{z}{r-1}\right) = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}-1}\right).$$

Comme la restriction de la fonction f à $S_{(c,s)} = \{(cr, sr, z) \ : \ c^2 + s^2 = 1,\ (r,0,z) \in K^*\}$ est bijective, f l'est aussi.
(iii) Soient

$$\varphi(u,\theta) = ((2 + c(u)) \cdot c(\theta), (2 + c(u)) \cdot s(\theta), s(u))$$

et

$$\psi(\theta, \lambda) = (2c(\theta), 2s(\theta), \lambda).$$

La restriction de φ à des carrés ayant la forme $I \times (-\pi, \pi)$ ou $I \times (0, 2\pi)$ donnent une famille de paramétrages de S dont l'image est S. La restriction de ψ à $(-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ et à $(0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ sont deux paramétrages. Leurs images couvrent C. Un calcul facile montre que

$$f(\varphi(u, \theta)) = \left(2c(\theta), 2s(\theta), \frac{s(u)}{1 + c(u)}\right).$$

Donc, si $\theta \in (-\pi, \pi)$, $f(\varphi(u, \theta)) \in \psi((-\pi, \pi) \times \mathbb{R})$. Si $\theta \in (0, 2\pi)$, alors $f(\varphi(u, \theta)) \in \psi((0, 2\pi) \times \mathbb{R})$. Donc, en tout cas, l'expression locale est

$$\widetilde{f} : (u, \theta) \mapsto \left(\theta, \frac{s(u)}{1 + c(u)}\right).$$

Le déterminant Jacobien de $\widetilde{f}$ est

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{1+c(u)} & 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{1 + c(u)} \neq 0.$$

□

Exercice 2 (30%)**.** (i) Soit M la surface de rotation obtenue en tournant la courbe régulière (une partie de l'hyperbole $xz = 1$)

$$\beta : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3, \quad u \mapsto (u, 0, u^{-1})$$

autour de l'axe des z. Montrer que la projection $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ induit un difféomorphisme $M \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. (*Indication* : Montrer que M est le graphe d'une fonction.)

(ii) Montrer qu'il est impossible de trouver une isométrie entre M et $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Corrigé. (i) Un point de M a la forme $(x, y, z) = (\cos(\theta) \cdot u, \sin(\theta) \cdot u, 1/u)$, $u \in \mathbb{R}_{>0}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Donc, $x^2 + y^2 = z^{-2} \Rightarrow z = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$. Si $x^2 + y^2 = z^{-2}$, alors nous prenons $1/z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et donc $xz = \cos(\theta)$, $xz = \sin\theta$ et $(x, y, z) = (xz/z, yz/z, z)$ est $(\cos(\theta) \cdot 1/z, \sin(\theta) \cdot 1/z, z)$ est la rotation d'un point de β. Il suit que M est le graphe de la fonction $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$, $h(u, v) = (u^2 + v^2)^{-1/2}$. Nous obtenons que $(u, v) \mapsto (u, v, h(u, v))$ est une fonction différentiable de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to M$, et elle est aussi l'inverse de la projection $M \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (qui est différentible car c'est la restriction à M d'une fonction différentiable).

(ii) Nous allons montrer que la courbure de M est < 0 : le théorème de Gauss sur la nature intrinsèque de la courbure nous donnera ce que nous voulons. Nous prenons le paramétrage $\Phi : (u, v) \mapsto (u, v, h(u, v))$ de M. Il suit que $\Phi_u = (1, 0, \partial_u h)$ et $\Phi_v = (0, 1, \partial_v h)$. Donc

$$\mathbf{N} = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{|\Phi_u \times \Phi_v|} = \frac{(-\partial_u h, -\partial_v h, 1)}{\sqrt{1 + (\partial_u h)^2 + (\partial_v h)^2}}.$$

Comme $\Phi_{uu} = (0, 0, \partial_{uu}h)$, $\Phi_{uv} = (0, 0, \partial_{uv}h)$ et $\Phi_{vv} = (0, 0, \partial_{vv}h)$, il suit que

$$e = \frac{\partial_{uu}h}{\sqrt{1 + (\partial_u h)^2 + (\partial_v h)^2}}, \quad f = \frac{\partial_{uv}h}{\sqrt{1 + (\partial_u h)^2 + (\partial_v h)^2}}, \quad g = \frac{\partial_{vv}h}{\sqrt{1 + (\partial_u h)^2 + (\partial_v h)^2}}.$$

Le signe de la courbure est alors le signe de la fonction $(\partial_{uu}h) \cdot (\partial_{vv}h) - (\partial_{uv}h)^2$. Un calcul direct montre que le signe de $\partial_{uu}h \cdot \partial_{vv}h - (\partial_{uv}h)^2$ dans le cas $h = (u^2 + v^2)^{-1/2}$ est le signe de $-2(u^4 + v^4 + 2u^2v^2)$, qui est toujours < 0 si $(u, v) \neq 0$. □

Exercice 3 (20%)**.** Soit S une surface régulière orientée par $\mathbf{N} : S \to \mathbf{S}$. ($\mathbf{S}$ est la sphère.)
(i) Justifier l'égalité $T_pS = T_{\mathbf{N}(p)}\mathbf{S}$.

(ii) Donner la définition de la deuxième forme fondamentale $\mathrm{II}_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ (par rapport à l'orientation $\mathbf{N}$).

(iii) Donner la définition des courbures principales.

(iv) Soit $\alpha : (a, A) \to S$ une courbe différentiable qui passe par p en $t = t_0$. Montrer que si $\alpha''(t)$ appartient à $T_{\alpha(t)}S$ pour chaque t, alors la courbure de Gauss de S en p est ≤ 0.

Corrigé. (i) Nous savons que l'espace tangent $T_q\mathbf{S}$ est le complément orthogonal du vecteur q. Étant donné que T_pS est le complément orthogonal de $\mathbf{N}(p)$, l'égalité en résulte.

(ii) D'après (i), nous pouvons considérer l'application linéaire $-D\mathbf{N}(p) : T_pS \to T_pS$. La deuxième forme fondamentale est la forme bilinéaire associée à $-D\mathbf{N}(p)$, i.e. $\mathrm{II}_p(\xi, \eta) = \langle \xi, -D\mathbf{N}(p) \cdot \eta \rangle$.

(iii) La matrice $-D\mathbf{N}(p) : T_pS \to T_pS$ est symétrique, et par conséquent il existe deux valeurs propres réels $k_1(p) \leq k_2(p)$. Ces valeurs propres s'appellent les courbures principales.

(iv) Comme $\langle \alpha'(t), \mathbf{N}(\alpha(t)) \rangle = 0$, il suit que

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \alpha'(t), \mathbf{N}(\alpha(t)) \rangle = \langle \alpha''(t), \mathbf{N}(\alpha(t)) \rangle + \langle \alpha'(t), D\mathbf{N}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \rangle .$$

Donc $\mathrm{II}_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \langle \alpha''(t), \mathbf{N}(\alpha(t)) \rangle$. Par hypothèse, $\mathrm{II}_p(\alpha'(t)) = 0$. Comme les courbures principales $k_{\max}(p)$ et $k_{\min}(p)$ sont respectivement le max et le min de la restriction de II_p à $\{w \in T_pS : |w| = 1\}$, il suit que $k_{\min}(p) \leq 0$ et $k_{\max}(p) \geq 0 \Rightarrow K(p) = k_{\min}(p) \cdot k_{\max}(p) \leq 0$. □

Exercice 4 (15%)**.** (i) Soit S une surface régulière et $c : (a, A) \to S$ une courbe différentiable. Quel condition c doit remplir pour être une géodésique en (a, A) ?

(ii) Soit C le cylindre $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Pour simplifier, nous allons appeler une géodésique de C une courbe différentiable $\gamma : I \to C$, définie sur un intervalle ouvert non–spécifié, qui est une géodésique en I. Décrire toutes les géodésiques de C qui passent par $p = (1, 0, 0)$.

Corrigé. (i) La dérivée $c''(t)$ doit être perpendiculaire à $T_{c(t)}S$ pour chaque t.

(ii) Posons $\varphi(u,v) = (\cos(u), \sin(u), v)$. Les restrictions de φ à $(0,2\pi)\times\mathbb{R}$ et à $(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$ donnent des paramétrages de C dont les images couvrent C. Soit $w = a\cdot\partial_u\varphi(0,0) + b\cdot\partial_v\varphi(0,0)$ un vecteur tangent à C en $p = \varphi(0,0)$. D'après le cours, il existe une seule géodésique $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to C$ qui passe par p avec vélocité w. C'est–à–dire, si $\tilde{\gamma} : (-\delta,\delta) \to C$ est une autre géodésique qui passe par p avec vélocité w en $t = 0$, alors $\tilde{\gamma} = \gamma$ sur l'intersection. Nous affirmons que la seule géodésique de C qui passe par p avec vélocité w est $\gamma(t) = \varphi(ta, tb)$. Il est clair que $\gamma''(t) = -a^2\cdot(\cos(at), \sin(at), 0)$. Comme $\partial_u\varphi(\gamma(t)) = (-\sin(ta), \cos(ta), 0)$ et $\partial_v\varphi(\gamma(t)) = (0,0,1)$, il suit que $\gamma''(t)$ est orthogonal à $\partial_u\varphi(\gamma(t))$ et à $\partial_v\varphi(\gamma(t))$. Étant donné que dans un petit voisinage de $(ta, tb) \in \mathbb{R}^2$ la fonction φ définit un paramétrage, l'esapce tangent $T_{\varphi(\gamma(t))}C$ est engendré par $\partial_u\varphi(\gamma(t))$ et $\partial_v\varphi(\gamma(t)) \Rightarrow \gamma$ est géodésique. Pour finir, la règle de la chaîne nous donne $\gamma'(t) = a\cdot\partial_u\varphi(ta,tb) + b\cdot\partial_v\varphi_v(ta,tb)$ et donc $\gamma'(0) = w$. □

Exercice 5 (15%)**.** Soit $\mathbb{C}P^2$ l'ensemble de droites complexes dans $\mathbb{C}^3$ qui passent par l'origine. Donner à $\mathbb{C}P^2$ une structure de variété différentielle de dimension 4.

Corrigé. Pour chaque vecteur $(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3$ non–nul, notons par $(z_0 : z_1 : z_2)$ la seule droite complexe qui passe par l'origine et par (z_0, z_1, z_2). Il suit que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors $(\lambda\cdot z_0 : \lambda\cdot z_1 : \lambda\cdot z_2) = (z_0 : z_1 : z_2)$. Notons U_j, $j = 0,1,2$, l'ensemble de droites qui ne sont pas contenues dans le sous–espace $H_j := \{z_j = 0\}$. Définissons maintenant les fonctions $\varphi_0 : \mathbb{C}^2 \to U_0$, $\varphi_1 : \mathbb{C}^2 \to U_1$ et $\varphi_2 : \mathbb{C}^2 \to U_2$ par

$$\varphi_0(s:t) = (1:s:t), \quad \varphi_1(s:t) = (s:1:t), \quad \varphi_2(s:t) = (s:t:1).$$

Montrons que φ_0 est une bijection. Si $(z_0 : z_1 : z_2) \in U_0$, alors $z_0 \neq 0$, car autrement la droite $\{(\lambda\cdot z_0, \lambda\cdot z_1, \lambda\cdot z_2) \,:\, \lambda \in \mathbb{C}\}$ est contenue dans $(z_0 = 0)$. Il suit que l'inverse de φ_0 est

$$(z_0 : z_1 : z_2) \mapsto \left(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}\right).$$

Pour vérifier que φ_1, φ_2 sont aussi des bijections, nous suivons la même recette que pour φ_0. Étant donné que chaque élément de $\mathbb{C}P^2$ a la forme $(z_0 : z_1 : z_2)$ avec $(z_0, z_1, z_2) \neq 0$, il suit que $\mathbb{C}P^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2$.

Soit $(z_0 : z_1 : z_2) \in U_0 \cap U_1$. Il suit que z_0 et z_1 sont non–nuls. Par conséquent, $\varphi_0^{-1}(U_0 \cap U_1) = \{(s,t) \in \mathbb{C}^2 \,:\, s \neq 0\}$. De façon analogue,

$$\varphi_0^{-1}(U_0 \cap U_2) = \{(s,t) \,:\, t \neq 0\}, \;\; \varphi_1^{-1}(U_0 \cap U_1) = \{(s,t) \,:\, s \neq 0\}, \;\; \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = \{(s,t) \,:\, t \neq 0\}, \;\; \text{etc.}$$

À l'aide de l'expression explicite pour l'inverse de φ_j donnée ci–dessus, il suit que

$$\varphi_1^{-1}\varphi_0(s:t) = \left(\frac{1}{s}, \frac{t}{s}\right), \quad \varphi_2^{-1}\varphi_0(s,t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{s}{t}\right), \quad \text{etc.}$$

Donc, les changements de paramétrages $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ sont des difféomorphismes.

Il suit que $\mathbb{C}P^2$ possède une structure de variété différentielle. Plus précisément, nous munissons $\mathbb{C}P^2$ de la topologie suivante : $V \subseteq \mathbb{C}P^2$ est ouvert $\Leftrightarrow \varphi_j^{-1}(V \cap U_j)$ est ouvert de $\mathbb{C}^2$. Dans ce

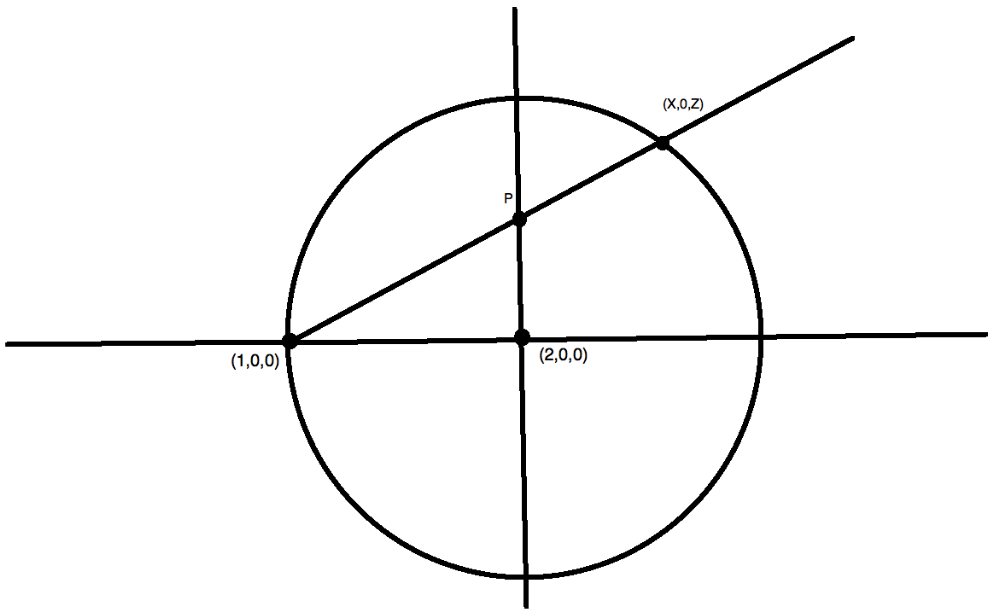

FIG. 1 – Calcul de p.

cas, $\varphi_j : \mathbb{C}^2 \to U_j$ est un homéomorphisme : Pour G un ouvert de $\mathbb{C}^2$, $\varphi_j(G)$ est ouvert car $\varphi_j^{-1}(\varphi_j(G) \cap U_j) = G$, et pour $G \subseteq U_j$ un ouvert, $\varphi_j^{-1}(G)$ est un ouvert par définition.

□