Université de Paris 6
Géométrie Différentielle Élémentaire
LM 326
Février–Juin 2012.

Première Session 2012

---

* *Les téléphones portables et les calculatrices sont interdits.*
* *Les réponses doivent être soigneusement justifiées.*
* *L'interprétation et bonne compréhension des énoncés est une partie importante du devoir.*
* *Cette épreuve est une évaluation globale, et vous pouvez perdre des points en faisant des affirmations fausses.*

Exercice 1 (20%). Comme d'habitude, nous identifions $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$. Soit $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polynôme complexe et soit $\pi_+ : \mathbf{S} \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ la projection stéréographique. Définissons la fonction $H : \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ par

$$H(p) = \begin{cases} \pi_+^{-1} \circ h \circ \pi_+(p), & \text{si } p \neq (0,0,1) \\ (0,0,1), & \text{autrement.} \end{cases}$$

(a) Montrer que H est différentiable sur l'ouvert $\mathbf{S} \setminus \{(0,0,1)\}$. [5%]
(b) Montrer que H est différentiable *partout*. [15%]

Exercice 2 (15%). Soit $\rho(u) = 2 + \cos(u)$, et $\zeta(u) = \sin(u)$. Soit

$$\mathbf{T} = \{(\rho(u) \cdot \cos(\theta), \rho(u) \cdot \sin(\theta), \zeta(u)) \ : \ u, \theta \in \mathbb{R}\}$$

le tore. On définit la fonction $f : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ par

$$(\rho(u)\cos(\theta), \rho(u)\sin(\theta), \zeta(u)) \mapsto (\rho(u+\pi/2)\cos(\theta), \rho(u+\pi/2)\sin(\theta), \zeta(u+\pi/2)).$$

Soit $p_0 = (3,0,0)$.
(a) Trouvez un paramétrage $\varphi : D_0 \to D$ d'un voisinage de p_0, et un paramétrage $\psi : E_0 \to E$ d'un voisinage de $f(p_0)$ tels que $f(D) \subseteq E$. (Vous pouvez utiliser ici un résultat do cours.)
(b) Calculez explicitement le changement de paramétrage $\widetilde{f} : D_0 \to E_0$ et montrez que f est différentiable sur un voisinage de p_0.
(c) On admet maintenant que f est différentiable partout. Vrai ou faux : f est une isométrie.

Exercice 3 (25%). Nous fixons une surface S, une orientation $\mathbf{N}$, et un point m de S.
(a) Soit $\alpha : (a, A) \to S$ une courbe différentiable qui passe par m en $t = t_0$. Montrer que $\mathrm{II}_m(\alpha'(t_0)) = \langle \mathbf{N}(m), \alpha''(t_0) \rangle$.
(b) Admettons que la fonction

$$S \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto |p|^2$$

atteint un maximum en m. Montrez que $K(m) > 0$. *Indication :* Montrez d'abord que m est dans la même direction que $\mathbf{N}(m)$, i.e. $|m| \cdot \mathbf{N}(m) = \pm m$. Puis, utilisez (a) pour étudier la deuxième forme fondamentale $\mathrm{II}_m : T_mS \to \mathbb{R}$.

Exercice 4 (10%)**.** (a) Donner un exemple d'une surface de courbure constante égale à 0.
(b) Donner un exemple d'une surface de courbure constante égale à 1.

Exercice 5 (30%)**.** Soit S la surface de rotation obtenue en faisant tourner une courbe régulière C, contenue dans le plan $\mathbf{xz}$, autour de l'axe $\mathbf{z}$.

Soit $\alpha : I_0 \to C$ un paramétrage de C ; on écrit $\alpha(u) = (\rho(u), 0, \zeta(u))$ où $\rho(u) > 0$ pour chaque $u \in I_0$. *On admet en plus que* $\|\alpha'(u)\|^2 = 1$. Soit

$$\varphi : I_0 \times (-\pi, \pi) \to S, \qquad (u, \theta) \mapsto (\rho(u) \cdot \cos(\theta), \rho(u) \cdot \sin(\theta), \zeta(u))$$

le paramétrage obtenu à l'aide de α.

(a) Calculer $E_\varphi, F_\varphi, G_\varphi$.
(b) Calculer explicitement les symboles de Christoffel $\Gamma^u_{\theta\theta}$ et $\Gamma^\theta_{u\theta}$. **Vous pouvez admettre que les autres sont nulles.**
(c) Soit $\gamma : (a, A) \to S$ une courbe contenue dans l'image de φ. Justifier brièvement l'existence de deux fonctions différentiables x et y telles que $\gamma(t) = \varphi(x(t), y(t))$.
(d) Décrivez explicitement le système d'équations différentielles lequel les fonctions x et y doivent satisfaire pour que γ soit une géodésique.
(e) On fixe un instant t_0 et on considère le méridien $\mu_{t_0} : u \mapsto \varphi(u, y(t_0))$ qui passe par le point $\gamma(t_0)$. Soit $\psi(t_0)$ l'angle entre les vecteurs

$$\mu'_{t_0}(x(t_0)) \quad \text{et} \quad \gamma'(t_0)$$

tangents à $\gamma(t_0) = \mu_{t_0}(x(t_0))$. Montrez que si γ est une géodésique, alors la fonction

$$t \mapsto \rho(x(t)) \cdot \sin \psi(t)$$

est constante.

Indication : Vous pouvez peut–être profiter du fait que si ξ_1, ξ_2 est une base **orthonormale** de $\mathbb{R}^2$, alors $w = \|w\| \cdot (\cos \psi \cdot \xi_1 + \sin \psi \cdot \xi_2)$, où ψ est l'angle entre w et ξ_1.

Université de Paris 6
Géométrie Différentielle Élémentaire
LM 326
Février–Juin 2012.

Deuxième Session 2012

** Les téléphones portables et les calculatrices sont interdits.*
** Les réponses doivent être soigneusement justifiées.*
** L'interprétation et bonne compréhension des énoncés est une partie importante du devoir.*
** Cette épreuve est une évaluation globale, et vous pouvez perdre des points en faisant des affirmations fausses.*

Exercice 1 (15%)**.** Donner un exemple d'une surface régulière S **autre que l'exemple d'un morceau de plan** dont la courbure de Gauss est constante et nulle. **Il faudra justifier votre réponse avec des calculs explicites.**

Exercice 2 (35%)**.** Soit

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad (u, \theta) \mapsto ((2 + \cos u)\cos\theta, (2 + \cos u)\sin\theta, \sin u),$$

et $\mathbf{T} = \Phi(\mathbb{R}^2)$ le tore.
(a) On définit l'application $f : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ par

$$\Phi(u, \theta) \mapsto \Phi(5u, 5\theta).$$

Soit $p \in \mathbf{T}$. Trouvez des paramétrages $\varphi : U_0 \to U$ d'un voisinage U de p, et $\psi : V_0 \to V$ d'un voisinage V de $f(p)$ tels que $f(U) \subseteq V$. En suite, calculez **explicitement** l'expression locale $\widetilde{f}$ de f par rapport à φ et ψ.
(b) Vrai ou faux : f est un difféomorphisme ? **Il faudra justifier votre réponse.**
(c) Vrai ou faux : f est un difféomorphisme local ? **Il faudra justifier votre réponse.**
(d) Calculer la courbure de Gauss de $\mathbf{T}$ en $\Phi(u, v)$.
(e) Soit $h : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ une isométrie. Montrer que l'ensemble $E = \Phi(\{0\} \times \mathbb{R})$ est invariant par h, i.e. $h(E) \subseteq E$.

Exercice 3 (20%)**.** Soit S une surface régulière connexe et orientée par le champ normal unitaire $\mathbf{N}$. On admet que pour chaque point $p \in S$, l'application linéaire $D\mathbf{N}(p)$ est un multiple $\lambda(p)$ de l'identité.
(a) Soit $\varphi : U_0 \to U$ un paramétrage local, U_0 connexe, et soient $\mathbf{N}_0 := \mathbf{N} \circ \varphi$ et $\lambda_0 := \lambda \circ \varphi$. Montrer que λ_0 est différentiable et satisfait aux équations

$$\begin{aligned} \partial_u \mathbf{N}_0(u, v) &= \lambda_0(u, v) \cdot \partial_u \varphi(u, v), \\ \partial_v \mathbf{N}_0(u, v) &= \lambda_0(u, v) \cdot \partial_v \varphi(u, v). \end{aligned} \tag{1}$$

(b) Montrez à l'aide des éqs. (1) que $\partial_u \lambda_0 \cdot \partial_v \varphi = \partial_v \lambda_0 \cdot \partial_u \varphi$. En déduire que λ est constante. (**Attention :** Vous devez montrer que λ, et non simplement λ_0, est constante !)
(c) Montrer que si $\lambda \neq 0$, alors $p \mapsto p - \frac{1}{\lambda}\mathbf{N}(p)$ est constante égale à c, et que S est contenue dans $\{p \in \mathbb{R}^3 \,:\, \|p - c\| = 1/|\lambda|\}$.

Exercice 4 (30%)**.** Soit S une surface régulière et $\mathbf{N} : S \to \mathbf{S}$ une orientation. On admet que chaque géodésique de S est contenue dans un plan de $\mathbb{R}^3$. Le but de cet exercice est montrer que dans ce cas, pour chaque $p \in S$, $D\mathbf{N}(p)$ est un multiple de l'identité, i.e. $k_{\max}(p) = k_{\min}(p)$.

On fixe une géodésique $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ qui passe par p en $t = 0$ avec vélocité non–nulle, et on note P le plan qui la contient. On pose $N(t) := \mathbf{N}(\gamma(t))$ (vous pouvez admettre que $t \mapsto N(t)$ est différentiable.) Finalement, on écrit $P = c + V$, où V est un sous–espace de $\mathbb{R}^3$.

1. On admet que $\gamma''(0) \neq 0$. Montrez que $N(t) \in V$ pour chaque t proche à zéro.
2. On admet que $\gamma''(0) \neq 0$. Montrez que $\{N(0), \gamma'(0)\}$ est une base de V.
3. On admet que $\gamma''(0) \neq 0$. Montrez que $D\mathbf{N}_p \cdot \gamma'(0) = \lambda \cdot \gamma'(0)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. (λ peut être $= 0$.)
4. Montrez que si $\mathrm{II}_p(\gamma'(0)) \neq 0$, alors $\gamma''(0) \neq 0$. (Vous pouvez faire appel à une formule vue dans le cours.)

On applique les questions précédentes pour montrer que $k_{\min}(p) = k_{\max}(p)$. On fixe deux directions principales $\vec{w}_{\min}$ et $\vec{w}_{\max}$ associées aux courbures principales $k_{\min}(p)$ et $k_{\max}(p)$. On admet en plus que $\|\vec{w}_{\min}\| = \|\vec{w}_{\max}\| = 1$.

a) On admet que $D\mathbf{N}_p \neq 0$. (Autrement la preuve est terminée !) On pose

$$\vec{w}(\theta) = \cos(\theta) \cdot \vec{w}_{\min} + \sin(\theta) \cdot \vec{w}_{\max}.$$

Montrez qu'il existe un intervalle ouvert non–vide I de $[0, 2\pi]$ tel que

$$D\mathbf{N}_p \cdot \vec{w}(\theta) = \lambda_\theta \cdot \vec{w}(\theta), \qquad \forall\, \theta \in I.$$

b) Montrez que $k_{\min}(p) = k_{\max}(p)$.