Université de Paris 6
Géométrie Différentielle Élémentaire
LM 326
Janvier–Juin 2013.

Première Session 2013

** Les téléphones portables, les documents, et les calculatrices sont interdits.*
** Les réponses doivent être soigneusement justifiées.*
** L'interprétation et bonne compréhension des énoncés est une partie importante du devoir.*
** Cette épreuve est une évaluation globale, et vous pouvez perdre des points en faisant des affirmations fausses.*

Exercice 1 (20%). (a) Soit P le plan $\{z = 1\}$ et $\mathbf{S}$ la sphère. Montrer que l'ensemble $M = P \cup \mathbf{S}$ n'est pas une surface régulière.

(b) Montrer que $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^5 = 0\}$ n'est pas une surface régulière.

Commentaire. Ce genre de question a été traité exhaustivement dans la feuille de TD 1.

Exercice 2 (20%). Soient S et S' des surfaces régulières et $f : S \to S'$ une fonction différentiable. On rappele la définition suivante :

$$T_pS = \left\{ \alpha'(t_0) \ : \ \begin{array}{c} \alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3 \text{ est différentiable,} \\ \text{contenue dans } S, \text{ et } \alpha(t_0) = p \end{array} \right\}.$$

Soient $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ et $\beta : (c, d) \to \mathbb{R}^3$ des courbes C^∞ telles que $\alpha(t), \beta(s) \in S$ pour chaque $a < t < b$ et $c < s < d$. Soient $m \in (a, b)$ et $n \in (c, d)$ tels que $\alpha(m) = \beta(n) = p$ et $\alpha'(m) = \beta'(n)$. Montrez que $(f\alpha)'(m) = (f\beta)'(n)$.

Commentaire : Un des points importants du cours est de comprendre que la géométrie différentielle est basée sur des *adaptations* des techniques du calcul différentiel à l'étude de la géométrie. Le mot adaptations est fondamental, car les techniques de base ne sont pas les mêmes du calcul différentiel. Dans cet exercice l'étudiant devrait montrer qu'il a bien compris ce principe et montrer comment on peut utiliser le calcul différentiel pour *définir* la dérivée d'une application entre surfaces. La dérivée étant quelque chose totalement centrale dans ce cours, l'étudiant devrait posséder les connaissances nécessaires pour répondre à cette question.

J'ai donné 7 points pour ceux qui ont montré avoir compris que l'exercice n'était pas une application évidente de la règle de la chaîne. D'autres 7 points pour ceux qui ont évoqué l'expression locale de f, et 6 points pour ceux qui ont conclu la démonstration.

La correction soigneuse de cet exercice se trouve dans le polycopié dans la partie sur la dérivée de f.

Exercice 3 (20%). Soit $\mathbf{T}$ le tore.

(a) À l'aide d'un difféomorphisme local $\mathbb{R}^2 \to \mathbf{T}$, montrer l'existence de deux champs de vecteurs différentiables X, Y sur $\mathbf{T}$ tels que $T_p\mathbf{T} = \mathbb{R} \cdot X(p) + \mathbb{R} \cdot Y(p), \quad \forall\, p \in \mathbf{T}$.

(b) Montrer que $\mathbf{T}$ est orientable.

Commentaire : J'ai donné 5 points pour ceux qui ont utilisé (a) pour montrer (*b*) : on définit $\mathbf{N}$ comme étant $X \times Y/\|X \times Y\|$ et c'est tout. La partie difficile était de montrer que X (et Y) sont globaux. Orienter localement est trivial, le problème c'est de trouver une orientation *globale*. Je crois que seulement deux étudiants ont bien fait cet exercice et ont fait sortir le fait fondamental : $\partial_u\varphi, \partial_v\varphi$ sont périodiques.

Quelques étudiants ont utilisé le changement de paramétrage pour montrer que X définit localement comme $\partial_u\varphi$ était bien définit globalement. Ils ont argumenté de la façon suivante.

$$\varphi(u, \theta) = ((2 + c_u)c_\theta, (2 + c_u)s_\theta, s_u)$$

est un difféo local. La restriction de φ à des carrés ayant la forme $(-\pi, \pi)\times(-\pi, \pi)$, $(-\pi, \pi)\times(0, 2\pi)$, etc donne un paramétrage. Comme la restriction de φ à $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ coïncide avec la restriction de φ à $(0, 2\pi) \times (-\pi, \pi)$, alors $\partial_u\varphi$ est bien définie sur l'image dans $\mathbf{T}$. Mais ceci ne veut rien dire. D'autres ont utilisé le fait que $\varphi_j^{-1}\varphi_i$, où φ_i est la restriction, est l'identité. Mais ceci est faux ! Pour exemplifier, on note φ_1 la restriction à $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ et φ_2 la restriction à $(0, 2\pi) \times (-\pi, \pi)$. Alors $\varphi_1^{-1}(\mathrm{Im}\varphi_1 \cap \mathrm{Im}\varphi_2)$ est

$$(-\pi, 0) \times (-\pi, \pi) \quad \cup \quad (0, \pi) \times (-\pi, \pi).$$

Sur la partie $(-\pi, 0) \times (-\pi, \pi)$, le changement de paramétrage $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ est

$$(u, v) \mapsto (u, v) + 2\pi(1, 0).$$

Pour être plus concret, on considère $p = \varphi_1(-\pi/2, 0)$. Ce point est dans l'image de φ_2, mais il est $p = \varphi_2(3\pi/2, 0)$.

La correction soigneuse de cette exercice a été faite en TD. Voir la feuille de TD 3.

Exercice 4 (20%). Soit $C = \{x^2 + y^2\ , x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ le demi cylindre et soit B la bande $(-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$.

1. Trouvez explicitement une isométrie $h : B \to C$. (Justifiez soigneusement vos affirmations.)
2. Montrez par des calculs directs que h préserve la courbure de Gauss.
3. Trouvez un point $p_0 \in B$ où la courbure moyenne de B en p_0 est différente de la courbure moyenne de C en $p = h(p_0)$.

Commentaire. L'erreur le plus courant dans cet exercice était le suivant : l'expression locale de h est l'identité, et donc une isométrie. Ceci est faux, car pour n'importe quel ouvert paramétré d'une surface S, $\varphi : U_0 \to U$, l'expression locale de φ, vue comme fonction différentiable du plan dans S, est l'identité. La difficulté est finalement la suivante : les coefficients de la première forme fondamentale doivent être égaux. La correction est faite dans le poly, page 45.

J'ai donné 10 points pour la question (1), 5 pour (2) et 5 pour (3).

Exercice 5 (20%). Soit $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ une courbe différentiable de vélocité scalaire constante (non nulle) et soient S et $\overline{S}$ des surfaces régulières dont l'intersection $S \cap \overline{S}$ est l'image de α. On suppose que S, respectivement $\overline{S}$, est orientée par $\mathbf{N}$, respectivement $\overline{\mathbf{N}}$. On suppose que l'angle entre $\mathbf{N}$ et $\overline{\mathbf{N}}$ est constant le long de α. On veut montrer que

$$\begin{array}{c}\text{Si } \alpha'(t) \text{ est valeur propre de } D\mathbf{N}_{\alpha(t)} \text{ pour chaque } t, \text{ alors} \\ \alpha'(t) \text{ est aussi valeur propre de } D\overline{\mathbf{N}}_{\alpha(t)} \text{ pour chaque } t.\end{array} \tag{*}$$

Dans la suite on écrit $N(t)$, respectivement $\overline{N}(t)$, au lieu de $\mathbf{N}\alpha(t)$, respectivement $\overline{\mathbf{N}}\alpha(t)$.

(a) Montrez que si les vecteurs $N(t)$ et $\overline{N}(t)$ sont colinéaires pour un certain t, alors $N(t) = \pm\overline{N}(t)$ pour tout t. Prouvez l'affirmation (*) dans ce cas extreme.

(b) On suppose désormais que $N(t)$ et $\overline{N}(t)$ sont linéairement indépendants. Montrez que pour chaque t, l'espace $N(t)^\perp \cap \overline{N}(t)^\perp$ est engendré par $\alpha'(t)$.

(c) Prouvez (*).

(d) Appliquez (*) pour montrer que la vélocité d'un méridien $\mu : \mathbb{R} \to \mathbf{T}$ du tore est un valeur propre de $D\mathbf{N}_{\mu(t)}$. (Un méridien est l'intersection de $\mathbf{T}$ avec un plan P engendré par $\cos(\theta) \cdot \vec{e}_1 + \sin(\theta) \cdot \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$.)

Commentaire. La partie (a) été facile, mais beaucoup ont commis l'erreur suivant. Si $N(t) = \overline{N}(t)$, alors $D\mathbf{N}_{\alpha(t)} = D\overline{\mathbf{N}}_{\alpha(t)}$. Mais les applications linéaires en question n'ont même pas le même espace de départ ! Quelques étudiants ont passé pas mal de temps à montrer que si $N(t)$ et $\overline{N}(t)$ étaient colinéaires, alors $N(t) = \pm\overline{N}(t)$ partout. Mais si l'angle est constant, si ils sont colinéaires pour un t_0, ils le sont pour tout t. Une fois que $N(t) = \overline{N}(t)$, il suit que $N'(t) = \overline{N}'(t)$, et comme $N'(t) = D\mathbf{N}_{\alpha(t)} \cdot \alpha'(t)$, la partie (*) découle immédiatement.

Finalement, seulement la partie (c) était difficile (10 points). Elle découle de (b). Si l'angle est constant, alors $\langle N, \overline{N} \rangle = \text{cte} \Rightarrow \langle N', \overline{N} \rangle + \langle N, \overline{N}' \rangle = 0$. Mais N' est dans la même direction que α' $\Rightarrow \langle N', \overline{N} \rangle = 0$. D'où $\langle N, \overline{N}' \rangle = 0$. On en déduit que $\overline{N}'$ est orthogonal à N, et comme $\langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = 1$, on en déduit que $\overline{N}$ est orthogonal à $\overline{N}$. Donc $\overline{N}' \in \overline{N}^\perp \cap N^\perp$ et d'après (b) $\overline{N}'$ est dans la même direction que α'.

Université de Paris 6
Géométrie Différentielle Élémentaire
LM 326
Janvier–Juin 2013.

Deuxième Session 2013

---

* *Les téléphones portables, les documents, et les calculatrices sont interdits.*
* *Les réponses doivent être soigneusement justifiées.*
* *L'interprétation et bonne compréhension des énoncés est une partie importante du devoir.*
* *Cette épreuve est une évaluation globale, et vous pouvez perdre des points en faisant des affirmations fausses.*

Exercice 1. Soient S une surface régulière, $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, et $\xi \in T_pS$ un vecteur tangent.

(a) On choisit deux courbes différentiables $\alpha : (a,b) \to S$ et $\beta : (c,d) \to S$ telles que $\alpha(m) = \beta(n) = p$ et $\alpha'(m) = \beta'(n) = \xi$. Montrez que $(f\alpha)'(m) = (f\beta)'(n)$. [8%]

(b) Soit α comme avant. On note $\partial_\xi f$ le nombre réel $(f\alpha)'(m)$. Montrez que la fonction

$$\xi \in T_pS \mapsto \partial_\xi f \in \mathbb{R}$$

est linéaire. [2%]

(c) Montrez l'existence d'un champ de vecteurs **différentiable** et tangent X_f sur S tel que $\left\langle X_f(p), \xi \right\rangle = \partial_\xi f$ pour chaque $p \in S$ et chaque $\xi \in T_pS$. [20%]

Exercice 2 (15%)**.** Soit $\mathbf{T}$ le tore et $p = (3,0,0) \in \mathbf{T}$. On sait que l'espace tangent à $\mathbf{T}$ en p est engendré par $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$. Orientez $\mathbf{T}$ dans un voisinage de p par um champ $\mathbf{N}$ et calculez explicitement la matrice de $D\mathbf{N}_p$ par rapport à cette base. (**Attention :** La précision est fondamentale.) Puis calculez la courbure de Gauss, les courbures principales et la courbure moyenne en p.

Exercice 3 (10%)**.** Soit C le cône épointé $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = z^2,\ z > 0\right\}$ et $\pi : C \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la projection évidente.

(a) La fonction π est une isométrie, vrai ou faux ?

(b) La fonction π est conforme, vrai ou faux ?

(c) Pour toute $\alpha : (a,b) \to C$ courbe différentiable, on a $\mathbf{L}_r^s(\alpha) \neq \mathbf{L}_r^s(\pi\alpha)$ pour chaque $[r,s] \subset (a,b)$. Vrai ou faux ?

Exercice 4. Soit S une surface régulière orientée par $\mathbf{N}$ et p un point de S où la courbure de Gauss est > 0. Soit $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ une courbe différentiable qui passe par p en $t = 0$.

(a) Montrez que $\mathrm{II}_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \langle \alpha''(t), \mathbf{N}(t) \rangle$. [5%]

(b) Montrez que pour un certain $\delta > 0$, l'image $\alpha((-\delta, \delta))$ se trouve d'un seul côté du plan tangent $p + T_pS$. (**Attention :** Vous n'avez pas le droit d'appliquer le résultat analogue vu dans le cours.) [15%]

Exercice 5 (25%). Soit L l'hélicoïde $\left\{(v\cos u, v\sin u, u) \in \mathbb{R}^3 \;:\; u, v \in \mathbb{R}^2\right\}$.

(a) Montrez que L est une surface régulière et orientable.

(b) On fixe une orientation $\mathbf{N}$ sur L. Une courbe différentiable $\alpha : (a, b) \to L$ est dite une ligne asymptotique si $\mathrm{II}_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = 0$ pour chaque t. Trouvez les lignes asymptotiques de L.

(c) Montrez que la courbure moyenne de L est nulle partout.

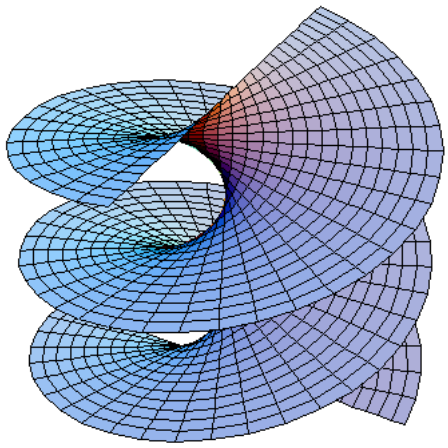

Figure 1 – L'hélicoïde