Université de Paris 6
Géométrie Différentielle Élémentaire
LM 326
Janvier–Avril 2014.
http://people.math.jussieu.fr/~dos-santos/Enseignement.html

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Soient $\alpha : (b, B) \to \mathbb{R}^n$ une courbe différentiable dont la vélocité scalaire est jamais nulle, et $a < A$ des nombres réels tels que $b < a < A < B$. Posons $L = \int_a^A \|\alpha'(t)\|\, dt$. Établir l'existence d'un difféomorphisme $\rho : (0, L) \to (a, A)$ tel que la courbe $\widetilde{\alpha} : (0, L) \to \mathbb{R}^n$ définie par $\tau \mapsto \alpha \circ \rho(\tau)$ a vélocité scalaire constante égale à 1.

Exercice 2. Soit P le plan $\{z = 1\}$ et $\mathbf{S}$ la sphère. Montrer que l'ensemble $M = P \cup \mathbf{S}$ n'est pas une surface régulière. *Indication :* Montrer que chaque voisinage ouvert U de $(0, 0, 1)$ dans M est telle que $U \setminus \{(0, 0, 1)\}$ n'est pas connexe. Conclure à l'aide du fait que un disque épointé de $\mathbb{R}^2$ est toujours connexe.

Exercice 3. (a) Soient P_1 et P_2 deux plans de $\mathbb{R}^3$ non–parallèles. Montrer que $S = P_1 \cup P_2$ *n'est pas* une surface régulière.

(b) Montrer que $C^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = z^2,\, z > 0\}$ est une surface régulière.

(c) Montrer que le cône $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = z^2\}$ n'est pas une surface régulière.

(d) Montrer que $C^{\geq 0} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 = z^2,\, z \geq 0\}$ n'est pas une surface régulière.

Exercice 4. (a) Soit $h : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$. Montrer que, pour chaque $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $h^{-1}(r)$ est une surface régulière.

(b) Soit $h(x, y, z) = x^n + y^n + z^n$, où n est pair. Montrer que $h^{-1}(r)$ est toujours une surface régulière *compacte*.

Exercice 5. Soit S une surface régulière et $p \in S$. Montrer qu'il existe un voisinage V de p dans $\mathbb{R}^3$, une fonction différentiable $f : V \to \mathbb{R}$ et un valeur régulier $\alpha \in \mathbb{R}$ de f tel que $f^{-1}(\alpha) = S \cap V$.

Exercice 6. Soit $\mathbf{T}$ le tore : c'est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ de la forme $(r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta), z)$, où (r, z) appartient au cercle de centre $(2, 0)$ et rayon 1. Montrer que

$$\mathbf{T} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right)^2 = 1 \right\}.$$

En déduire que $\mathbf{T}$ est une surface régulière.

Exercice 7 (Surfaces de rotation)**.** Soit C une courbe régulière dans **xz**. Nous admettons que C ne touche pas l'axe **z**. Posons

$$S = \{(\rho \cdot c, \rho \cdot s, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \ : \ c^2 + s^2 = 1, \ (\rho, 0, \zeta) \in C\}.$$

Soit

$$\alpha = (\rho, 0, \zeta) : I \to \mathbb{R}^3$$

un paramétrage d'un ouvert de C et définissons

$$\varphi_\alpha : I_0 \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3, \qquad (u, \theta) \mapsto (\rho(u) \cdot \cos(\theta), \rho(u) \cdot \sin(\theta), \zeta(u)).$$

(i) Montrez que $\varphi_\alpha(u, \theta) \in S$ pour chaque u, θ.
(ii) Justifiez l'affirmation « φ_α est différentiable ». Montrez que $D\varphi_\alpha$ a toujours rang deux.
(iii) Montrez avec un argument géométrique que φ_α est injective.

Maintenant nous prouvons que φ_α est un homéomorphisme sur son image. Dit autrement, φ_α^{-1} est continue.

(iv) Soit $\gamma : \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la fonction $(r, \theta, z) \mapsto (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta), z)$. Montrez que γ est un difféomorphisme sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$. (γ est le système de coordonnées cylindriques !) Décrivez l'ouvert U.
(v) Soit $(x, y, z) = \varphi_\alpha(u, \theta)$. Utilisez (iv) pour exprimer u, θ comme des fonctions différentiables de x, y, z. Conclure.

Exercice 8 (Un autre paramétrage de **S**)**.** C'est le paramétrage par la longitude (distance angulaire entre un méridien et le méridien de Greenwich) et la latitude (la distance angulaire entre l'équateur et un tropique). Définissons

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbf{S}, \quad (u, \theta) \mapsto (\cos u \cos \theta, \cos u \sin \theta, \sin u).$$

(1) Montrer que $\varphi(u, \theta)$ est obtenu en tournant le point $(\cos u, 0, \sin u)$ d'un angle θ (le sens anti–horaire) autour de l'axe **z**.
(2) Montrer que

$$\mathbf{N}_\varphi = \partial_u \varphi \times \partial_\theta \varphi = -\varphi(u, \theta) \cos u$$

et que

$$\left\| \mathbf{N}_\varphi \right\| = \cos u.$$

(3) Montrer que la restriction de φ à $(-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi, \pi)$ définit un paramétrage local de **S** dont l'image exclut le méridien $M = \{(\cos(u), 0, \sin(u)) \ : \ u \in [-\pi/2, \pi/2]\}$.
(4) En déduire, à l'aide des rotations et de φ, que **S** est une surface régulière.

Exercice 9. Soit S un surface régulière. Montrer que l'intérieur de S, vue comme sous–ensemble de $\mathbb{R}^3$, est vide.

Exercice 10 (Une autre projection stéréographique)**.** Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Soit p_0 le point $(1, 0, 0)$.
(1) Soit $(x, y, z) \in H$ avec $x \neq 1$, et soit L la droite qui joint p_0 et x. Trouver l'équation explicite du point $(0, u(x, y, z), v(x, y, z))$ où L coupe le plan $\{x = 0\}$.
(2) Montrer que $u(x, y, z)^2 - v(x, y, z)^2 + 1 \neq 0$.
(3) Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ complémentaire à $\{u^2 - v^2 + 1 = 0\}$. Soit M la droite de $\mathbb{R}^3$ qui joint p_0 et $(0, u, v)$. Trouver une équation explicite pour deuxième point $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ dans l'intersection $M \cap H$.
(4) Montrer que

$$U \to H \setminus \{x = 1\}, \qquad (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

est un paramétrage.

Exercice 11. Montrer, à l'aide du fait que « chaque surface régulière est localement un graphe », que les ensembles suivants *ne sont pas* des surfaces régulières.
(a) $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 + z^5 = 0\}$,
(b) $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^3 + z^5 = 0\}$.

Exercice 12. Soit S une surface régulière et $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un fonction différentiable telle que $S = h^{-1}(0)$. Vrai ou faux : 0 est une valeur régulière de h ?