Université de Paris 6
Géométrie Différentielle Élémentaire
LM 326
Janvier–Avril 2014.
`http://people.math.jussieu.fr/~dos-santos/Enseignement.html`

Feuille d'exercices n° 2

Les fonctions différentiables dans la théorie des surfaces régulières

Exercice 1. (a) Soit $\pi_+ : \mathbf{S} \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ la projection stéreographique à partir du pôle nord et $\pi_- : \mathbf{S} \setminus \{(0,0,-1)\} \to \mathbb{R}^2$ la projection à partir du pôle sud. Calculer explicitement $\pi_+ \circ (\pi_-)^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $\pi_- \circ (\pi_+)^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Vérifier que $\pi_+ \circ (\pi_-)^{-1}$ et $\pi_- \circ (\pi_+)^{-1}$ sont de classe C^∞.
(b) Soit $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la réfléxion : $(u, v) \mapsto (u, -v)$. Posons

$$\Phi := (\pi_+)^{-1} \circ \rho, \quad \Psi := (\pi_-)^{-1}.$$

Montrer que Φ et Ψ sont des paramétrages locaux de $\mathbf{S}$ et que $\Phi^{-1} \circ \Psi$ et $\Psi^{-1} \circ \Phi$ sont des fonctions holomorphes.

Exercice 2. Soit S une surface régulière et soient π_1, π_2 et π_3 les projections naturelles $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Montrer que leur restriction à S est toujours différentiable. Plus généralement, montrer que si $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est différentiable, sa restriction à S l'est aussi.

Exercice 3. (a) Soient $f : M \to N$ et $g : N \to P$ des fonctions différentiables entre des surfaces régulières. Montrer que $g \circ f$ est également différentiable.
(b) Soient $f : M \to N$ et $g : N \to P$ des difféomorphismes entre des surfaces régulières. Montrer que $g \circ f$ est un difféomorphisme.

Exercice 4. Rappeler le cours d'Arithmétique et montrer que l'ensemble de fonctions $f : S \to \mathbb{R}$ différentiables sur une surface est un anneau (avec la multiplication et l'addition usuelles).

Exercice 5. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ une fonction différentiable et injective. Montrer que si l'image de U est contenue dans une surface régulière S et que $\mathrm{Jac}(\varphi)$ est partout de rang deux, alors φ est un paramétrage de S.

Exercice 6. Montrer que $\mathbf{S}$ est une surface **homogène** : étant donné $p \neq q$ sur $\mathbf{S}$, il existe toujours un difféomorphisme $f : \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ tel que $f(p) = q$.

Exercice 7. Soit $\mathbf{T}$ le tore. Montrer que

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbf{T}, \quad (u, \theta) \mapsto ((2 + \cos u)\cos\theta, (2 + \cos u)\sin\theta, \sin u)$$

est un difféomorphisme local qui n'est pas un difféomorphisme.

Exercice 8. Soit $h : S \to S'$ une fonction différentiable. On admet S connexe. Montrer que si $Dh_p = 0$ pour chaque $p \in S$, alors $h(p) = h(q)$ pour chaque $p, q \in S$.

Exercice 9. Comme d'habitude, nous identifions $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Notons $N = (0, 0, 1)$.
(i) Soit $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polynôme complexe et soit $\pi_+ : \mathbf{S} \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ la projection stéréographique. Montrer que

$$H : \mathbf{S} \to \mathbf{S}, \quad H(p) = \begin{cases} \pi_+^{-1} \circ h \circ \pi_+(p), & \text{si } p \neq N \\ N, & \text{autrement} \end{cases}$$

est différentiable.
(ii) Pouvez–vous en déduire un énoncé similaire avec $h = 1/z$?

L'espace tangent

Exercice 10. Trouver l'équation du espace tangent à S au point p dans chaque un des cas suivants :
(a) $S = \{(u, v, u^2 - v^2) : (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$, $p = (1, 1, 0)$.
(b) $S = \{(r \cdot \cosh\theta, r \cdot \sinh\theta, r^2) : (r, \theta) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}\}$, $p = (1, 0, 1)$. [1]

Exercice 11. Soit P le plan $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbf{S}$ la sphère. Montrer que $X = P \cup \mathbf{S}$ n'est pas une surface régulière.

Exercice 12 (Le théorème d'inversion locale)**.** Soient S et S' des surfaces régulières et $h : S \to S'$ une fonction différentiable. Montrer que si $Dh(p) : T_pS \to T_{h(p)}S'$ est un isomorphisme, alors il existe des voisinages U de p et U' de $h(p)$ tels que $h : U \to U'$ est un difféomorphisme.

Exercice 13. Soit $h(z) = z^2$; définissons H comme dans l'exercice 9. Le pôle nord $(0, 0, 1)$ sera noté N dans la suite.
1) Trouver une base de $T_N\mathbf{S}$.
2) Trouver la matrice de $DH(N)$ par rapport à la base de 1).

Exercice 14. Soit $h(z) \in \mathbb{C}[z]$ et soit $H : \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ la fonction différentiable déduite de h comme dans l'exercice 9. Montrer qu'il existe un nombre fini F de points de $\mathbf{S}$ tel que $H : \mathbf{S} \setminus F \to \mathbf{S}$ est un difféo local.

Exercice 15. Soient S et S' des surfaces régulières et soit $p \in S \cap S'$ tel que $T_pS + T_pS' = \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert $B \subseteq \mathbb{R}^3$ de p tel que $S \cap S' \cap B$ est l'image d'une courbe différentiable $\alpha : (a, A) \to \mathbb{R}^3$.

1. Pour montrer que S est une surface régulière, la seule difficulté est se souvenir que $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un difféo, l'inverse étant $\theta \mapsto \log(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1})$.