Université de Paris 6
Géométrie Différentielle Élémentaire
LM 326
Janvier–Avril 2014.
`http://people.math.jussieu.fr/~dos-santos/Enseignement.html`

Feuille d'exercices n° 2 – exercices supplémentaires

Le but des exercices qui suivent est donner une preuve géométrique du théorème fondamental de l'algèbre : chaque polynôme complexe non–constant possède au moins une racine complexe. Il sont plus difficiles car il demandent plus de maturité. Par contre, il n'a absolument aucune technique utilisée qui vous n'avez pas encore vu. L'exercice est une adaptation d'une partie du grand classique de J. W. Milnor : *Topology from the Differentiable Viewpoint.*

Définition 1. Soit $f : M \to N$ une fonction différentiable entre deux surfaces régulières.

(1) Un point x de M est dit *critique* si $Df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ n'est pas surjective.
(2) Un point y est dit *valeur* critique si $f^{-1}(y)$ contient *au moins un point critique*.
(3) Si $y \in N$ n'est pas une valeur critique, on dit que y est une valeur régulière.

Exercice 1. Soit $f : M \to N$ une fonction différentiable entre deux surfaces régulières. On admet que M est compacte.

(1) Montrer que si $x \in M$ est tel que $Df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ est un isomorphisme, alors il existe un voisinage ouvert U de x et un voisinage V de $f(x)$ tels que $f|_U : U \to V$ est un difféomorphisme entre.
(2) Soit $y \in N$ une valeur régulière de f. Montrer que $f^{-1}(y)$ est fini.
(3) Soit $y \in N$ une valeur régulière de f. Montrer qu'il existe un voisinage V de y tel que $f^{-1}(V)$ est une **réunion disjointe** $\cup U_i$ où $f|_{U_i} : U_i \to V$ est un difféomorphisme.
Indication : On écrit $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Pour chaque i, il existe un voisinage U_i' de x_i et un voisinage V_i de y tels que $f : U_i' \to V_i$ est un difféomorphisme. En plus, on peut supposer que $U_i' \cap U_j' = \varnothing$. La solution plus simple, $V = \cap_i V_i$, ne convient pas ! Rien peut garantir que chaque point de $\cap_i V_i$ est dans l'image d'un point de $\cup_i U_i'$. On doit faire appel au fait que l'image d'un fermé de M est aussi fermé en N. Montrez que

$$V = (\cap_i V_i) \setminus f\left(M \setminus \cup_i U_i'\right)$$

donne la bonne réponse.

Exercice 2. Soit $f : M \to N$ une fonction différentiable entre deux surfaces régulières. On admet que M est compacte. On note C l'ensemble des valeurs régulières de f. Montrer que la fonction

$$N \setminus C \to \mathbb{N}, \qquad y \mapsto \# f^{-1}(y)$$

est localement constante.
Indication : Il suffit d'appliquer l'exercice précédent.

Exercice 3. Soit N une surface régulière connexe. Montrer que si C est un ensemble fini, alors $N \setminus C$ est aussi connexe.
Indication : Récurrence sur le cardinal de C.

Exercice 4. Soit $f : M \to N$ une fonction différentiable et *non–constante* entre deux surfaces régulières. On suppose que

(i) M et N sont connexes.

(ii) M est compacte

(iii) L'ensemble des valeur critiques C de f est *fini*.

On veut montrer que f est surjective.

(1) Utiliser le fait que $N \setminus C$ est connexe et que la fonction $y \mapsto \# f^{-1}(y)$ est *localement constante* sur $N \setminus C$ pour en déduire que $y \mapsto \# f^{-1}(y)$ est *constante* sur $N \setminus C$.
(2) Utiliser le fait que f n'est pas constante pour montrer que la fonction $y \mapsto \# f^{-1}(y)$ est constante et *strictement positive* sur $N \setminus C$. En déduire que chaque point de $N \setminus C$ appartient à l'image de f.
(3) Soit y une valeur critique de f et soit $\{y_n\}$ une suite de valeurs régulières de f qui converge vers y. Soit $x_n \in M$ tel que $f(x_n) = y_n$. Trouver un sous–ensemble infini $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ tel que la suite $\{x_n : n \in N_1\}$ converge vers x. Montrer que $f(x) = y$.
(4) En déduire que f est surjective.

Exercice 5. Soit h un polynôme complexe et non–constant. Soit $\pi_+ : \mathbf{S} \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$ la projection stéréographique à partir du pôle nord.
(1) Montrer que la fonction

$$H : \mathbf{S} \to \mathbf{S}, \qquad p \mapsto \begin{cases} N, & \text{si } p = N, \text{ et} \\ \pi_+^{-1} \circ h \circ \pi_+(p) & \text{autrement} \end{cases}$$

est différentiable.
(2) Montrer que H possède que un nombre fini de valeurs critiques.
Indication : La dérivée d'une fonction holomorphe $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vu comme fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est simplement la dérivée complexe $\varphi'(z)$ vu comme application linéaire de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ via multiplication.
(3) Montrer que $\# h^{-1}(0) \geq 1$.