Université de Paris 6
Géométrie Différentielle Élémentaire
LM 326
Janvier–Avril 2014.
`http://people.math.jussieu.fr/~dos-santos/Enseignement.html`

Feuille d'exercices n° 3

L'orientation

Exercice 1. Montrer que, si S est orientable et connexe, et $\mathbf{N}$ et $\widetilde{\mathbf{N}}$ sont deux orientations sur S, alors soit $\widetilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N}$, soit $\widetilde{\mathbf{N}} = -\mathbf{N}$.

Exercice 2 (Le ruban de Moebius)**.** Nous allons définir une surface régulière $\mathbf{M}$ qui n'est pas orientable. C'est le Ruban de Moebius.

Prenons $T = \{2\} \times \{0\} \times (-1, 1) \subseteq \mathbf{xz}$. Cet intervalle ouvert donne, pour chaque $\theta \in \mathbb{R}$ un autre intervalle, $T_\theta = R_\theta(T)$, où [1]

$$R_\theta = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1(\theta) & \vec{e}_2(\theta) & \vec{e}_3(\theta) \end{bmatrix}$$

est la rotation de θ–radians au tour de l'axe $\mathbf{z}$. Il est clair que $\bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} R_\theta(T)$ est un cylindre (ouvert). Le ruban de Moebius, noté $\mathbf{M}$, est obtenu en prenant l'union

$$\bigcup_\theta L_{\theta/2} R_\theta(T),$$

où $L_{\theta/2}$ est la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'un angle de $\theta/2$–radians autour de la droite $R_\theta(2\vec{e}_1) + \lambda \cdot R_\theta(\vec{e}_2)$ (c'est la droite qui passe au centre $R_\theta(2\vec{e}_1)$ de $R_\theta(T)$ et qui est perpendiculaire au plan $R_\theta(\mathbf{xz})$).

(a) Montrer que la rotation d'un point $2\vec{e}_1(\theta) + u\vec{e}_3(\theta) \in R_\theta(T)$ est

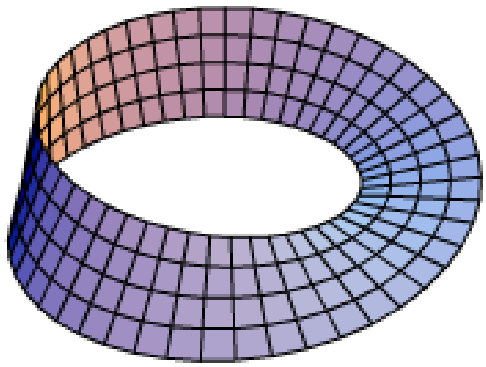
$$\begin{aligned} \psi(u, \theta) &:= u \cdot \Big(-s_{\theta/2}\vec{e}_1(\theta) + c_{\theta/2}\vec{e}_3(\theta)\Big) + 2\vec{e}_1(\theta) \\ &= \Big[2 - u \cdot s_{\theta/2}\Big] \cdot \vec{e}_1(\theta) + u \cdot c_{\theta/2} \cdot \vec{e}_3(\theta). \end{aligned}$$

(b) Montrer que la restriction de $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ à $U_0 = (-1, 1) \times (-\pi, \pi)$ et $V_0 = (-1, 1) \times (0, 2\pi)$ donnent des paramétrages de $\mathbf{M}$ et que $\psi(U_0) \cup \varphi(V_0) = \mathbf{M}$.

(c) Montrer que $\mathbf{M}$ n'est pas orientable.

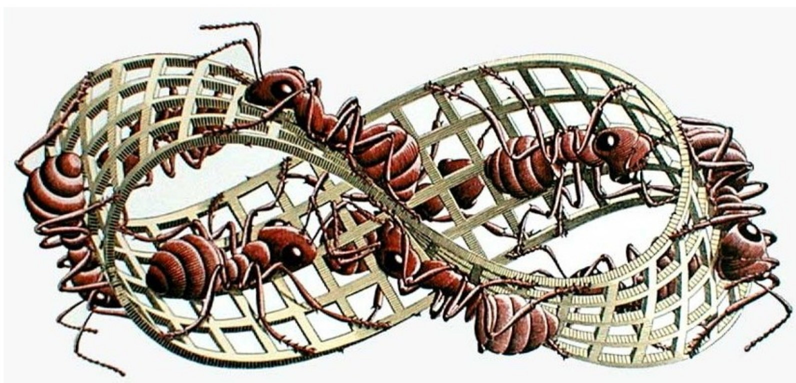
---

1. $c_\theta = \cos(\theta)$ et $s_\theta = \sin(\theta)$.



.

FIGURE 1 – Le Ruban de Moebius



.

FIGURE 2 – Et le Ruban de Moebius vu par M. Escher.

Exercice 3. Montrer que le tore $\mathbf{T}$ est une surface orientable. *Indication :* Nous devons trouver deux champs tangents X, Y sur $\mathbf{T}$ tels que l'espace tangent de $\mathbf{T}$ en chaque point p est engendré par $X(p)$ et $Y(p)$.

Exercice 4. Soit S une surface qui possède une structure

$$\left\{\varphi_j : U_{0,j} \to U_j\right\}$$

de surface de Riemann. Montrer que les champs normaux $\mathbf{N}_{\varphi_j} : U_j \to \mathbf{S}$ et $\mathbf{N}_{\varphi_k} : U_k \to \mathbf{S}$ coïncident sur $U_j \cap U_k$. Montrer qu'il existe une orientation $\mathbf{N} : S \to \mathbf{S}$ qui coïncide, sur U_j, avec $\mathbf{N}_{\varphi_j}$. En déduire que S est orientable et que les paramétrages φ_j sont toujours compatibles avec $\mathbf{N}$. *Indication :* Utiliser la formule

$$\mathbf{N}_{\varphi_j}(p) = \frac{\det \mathrm{Jac}(\varphi_k^{-1} \circ \varphi_j)(\varphi_j^{-1}(p))}{\left|\det \mathrm{Jac}(\varphi_k^{-1} \circ \varphi_j)(\varphi_j^{-1}(p))\right|} \cdot \mathbf{N}_{\varphi_k}(p), \quad \forall p \in U_j \cap U_k.$$

Exercice 5. Dans cet exercice, nous allons montrer que chaque surface compacte orientable [2] est en fait une surface de niveau. L'idée clé est la notion de *voisinage tubulaire*.

2. Il est possible de montrer que chaque surface compacte est déjà orientable, mais la preuve est beaucoup plus

Soit S une surface régulière orientée par $\mathbf{N} : S \to \mathbf{S}$. Soit $p \in S$ et $\varepsilon > 0$. Le **segment normal à** p **de longueur** 2ε est l'ensemble

$$I_p(\varepsilon) = \{p + t \cdot \mathbf{N}(p) \ : \ -\varepsilon < t < \varepsilon\}.$$

(i) Soit $p \in S$ quelconque, et soit $\varphi : U_0 \to U$ un paramétrage d'un voisinage de p dans S. En utilisant la fonction

$$F(u, v, t) = \varphi(u, v) + t\mathbf{N}(\varphi(u, v)),$$

montrez qu'il existe un voisinage V de p et un $\varepsilon > 0$ tels que

a) $I_{p_1}(\varepsilon) \cap I_{p_2}(\varepsilon) = \emptyset$ si $p_1, p_2 \in V$ sont différents ;

b) la réunion des $I_q(\varepsilon)$ pour $q \in V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Nous supposons maintenant que S est *compacte*. À l'aide de (i) établir l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que

a) $I_{p_1}(\varepsilon) \cap I_{p_2}(\varepsilon) = \emptyset$ si $p_1, p_2 \in S$ sont différents ;

b) la réunion des $I_p(\varepsilon)$ pour $p \in S$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Soit T la réunion des segments normaux comme en ii)-b). Trouvez une fonction différentiable $t : T \to \mathbb{R}$ telle que $S = t^{-1}(0)$ et telle que 0 soit valeur régulière.

---

difficile.

La métrique

Exercice 6. (a) Rappelons que

$$\varphi : (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi, \pi) \to \mathbf{S}, \quad (u, \theta) \mapsto (\cos(u) \cdot \cos(\theta), \cos(u) \cdot \sin(\theta), \sin(u))$$

définit un paramétrage de la sphère $\mathbf{S}$. Calculer E, F, G.

(b) Calculer les coefficients de la première forme fondamentale pour le paramétrage de $\mathbf{T}$ donné par la restriction de

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbf{T}, \quad (u, \theta) \mapsto ((2 + \cos(u)) \cdot \cos(\theta), (2 + \cos(u)) \cdot \sin(\theta), \sin(u))$$

à un carré $Q = (u_0 - \pi, u_0 + \pi) \times (v_0 - \pi, v_0 + \pi)$.

(c) Soit Γ le graphe d'une fonction différentiable $h : U_0 \to \mathbb{R}$. Calculer les fonctions $E, F, G : U_0 \to \mathbb{R}$ associées au paramétrage évident.

(d) Montrer que

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbf{T}, \quad (u, \theta) \mapsto ((2 + \cos(u)) \cdot \cos(\theta), (2 + \cos(u)) \cdot \sin(\theta), \sin(u))$$

preserve la longueur des courbes $u \mapsto (u, \theta_0)$.

Exercice 7. (a) Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que $\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle$. Soit S une surface régulière et $S' = T(S)$. Remarquer que S' est une surface régulière et que $T : S \to S'$ est une isométrie.

(b) Soit $S = \mathrm{Rot}(C)$ la surface de rotation obtenue en tournant la courbe régulière $C \subseteq \mathbf{xz}$ autour de l'axe $\mathbf{z}$. Montrer que les rotations de S autour de l'axe $\mathbf{z}$ sont des isométries de S.

Exercice 8. Soient $\varphi : U_0 \to U$ et $\varphi' : U_0 \to U'$ des paramétrages locaux de S et S'. Alors $h := \varphi' \circ \varphi^{-1} : U \to U'$ est une isométrie si et seulement si $E_\varphi = E_{\varphi'}$, $F_\varphi = F_{\varphi'}$ et $G_\varphi = G_{\varphi'}$ (nous les considérons comme des fonctions de $U_0 \to \mathbb{R}$).

Exercice 9. Soit $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbf{S} \setminus \{(0,0,1)\}$ l'inverse de la projection stéreographique. Montrer que σ est conforme. Remarquer que σ n'est pas une isométrie.

Exercice 10. Soient S et S' des surfaces régulières et soit $h : S \to S'$ un difféomorphisme conforme. Admettons que pour chaque paramétrage local $\varphi : U_0 \to U \subseteq S$, et chaque sous–ensemble compact $\Omega \subseteq U$ tel que $\varphi^{-1}(\partial\Omega)$ est de mesure nulle, l'égalité

$$\mathrm{Aire}_\varphi(\Omega) = \mathrm{Aire}_{h\circ\varphi}(h(\Omega))$$

soit satisfaite. Montrer que h est une isométrie.

Indication : Soit $\varphi : U_0 \to U$ un paramétrage local de S et soit $\varphi' = h \circ \varphi : U_0 \to h(U)$ le paramétrage déduit de φ. Montrer que les fonctions $\sigma := E_\varphi G_\varphi - F_\varphi^2 : U_0 \to \mathbb{R}$ et $\sigma' := E_{\varphi'} G_{\varphi'} - F_{\varphi'}^2 : U_0 \to \mathbb{R}$ coincident.

Exercice 11. (a)Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un isomorphisme. Montrer que T est conforme, i.e. préserve les angles, si et seulement si $\langle Te_1, Te_2 \rangle = 0$ et $\|Te_1\| = \|Te_2\|$. En déduire que la matrice de T par rapport à la base canonique a une des deux formes

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

(b) Soit $h : U \to V$ un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Montrer, à l'aide des équations de Cauchy–Riemann, que h est une application *holomorphe* si, et seulement si, (i) h est conforme, et (ii) det $Dh(p)$ est toujours positif.

Exercice 12. Soit S une surface régulière orientée par un champ normal $\mathbf{N}$. Une **structure conforme**[3] sur S est une famille de paramétrages locaux $\{\varphi_j : U_{0,j} \to U_j\}$ ayant les propriétés suivantes :

C1 $\cup_j U_j = S$;

C2 φ_j est compatible avec l'orientation, c'est à dire, $\mathbf{N}_{\varphi_j} = \mathbf{N}$ sur U_j ;

C3 φ_j est conforme.

Soit $\{\varphi_j : U_{0,j} \to U_j\}$ une famille de paramétrages de S telle que $\cup_j U_j = S$.

Montrer que si $\{\varphi_j\}$ donne une structure *conforme* sur S, alors $\{\varphi_j\}$ donne une structure de surface de Riemann sur S.

3. Ce n'est pas la définition usuelle.