Université de Paris 6
Géométrie Différentielle Élémentaire
LM 326
Janvier–Avril 2014.
`http://people.math.jussieu.fr/~dos-santos/Enseignement.html`

Feuille d'exercices n^{o} 4

La dérivé de l'application normale de Gauss

Exercice 1. Montrer que l'image de $\Sigma = \left\{ w \in T_pS \mid \|w\| = 1 \right\}$ par II_p est l'intervalle $[k_{\min}(p), k_{\max}(p)]$.

Exercice 2. Montrer que la courbure et la courbure moyenne sont des fonctions différentiables sur S.

Exercice 3. (a) Soit I l'intervalle $(0, a)$ où $\sinh < 1$. (Nous pouvons prendre $a = \log(1 + \sqrt{2})$, mais peu importe.) Définissons S comme la surface obtenue en tournant la courbe régulière (qui n'a qu'un paramétrage)

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^3, \quad u \mapsto \left(\cosh(u), 0, \int_0^u \sqrt{1 - \sinh^2(\tau)}\, d\tau \right)$$

autour de l'axe $\mathbf{z}$. Montrer que la courbure de Gauss de S est constante égale à -1.
(b) Soit $\mathbf{P}$ la surface de rotation obtenue à partir de la courbe régulière (qui n'a qu'un paramétrage)

$$\beta : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3, \quad u \mapsto \left(e^{-u}, 0, \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2\tau}}\, d\tau \right).$$

Montrer que la courbure de Gauss de $\mathbf{P}$ est constante égale à -1. La surface régulière $\mathbf{P}$ s'appelle la *pseudo–sphère*.

Exercice 4. Soit $h : U_0 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur l'ouvert $U_0 \subseteq \mathbb{R}^2$. La surface $S = \{(x, y, z) \in U_0 \times \mathbb{R} \,:\, z = h(x, y)\}$ admet un unique paramétrage $\varphi : (u, v) \to (u, v, h(u, v))$. Calculer les coefficients de la deuxième forme fondamentale et la courbure comme fonctions de U_0 en $\mathbb{R}$.

Exercice 5. (a) Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface orientée par $\mathbf{N} : S \to \mathbb{R}^3$ et soit $L = \vec{a} + R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un mouvement rigide.[1] Soit $S' = L(S)$.
(a) Rappeler pourquoi S' est aussi une surface régulière. Montrer que $L : S \to S'$ est une fonction différentiable. Montrer que $DL_p : T_pS \to T_{L(p)}S'$ est la restriction de R à T_pS.
(b) Soit $\mathbf{N}' : S' \to \mathbb{R}^3$ la fonction $\mathbf{N}'(p') := R \cdot \mathbf{N}(L^{-1}(p'))$. Montrer que $\mathbf{N}'$ est une orientation sur S'.
(c) Montrer que pour chaque point $p \in S$, nous avons $K(p) = K(L(p))$.

1. C'est–à–dire, $L(p) = \vec{a} + R(p)$, où $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est une isométrie linéaire.

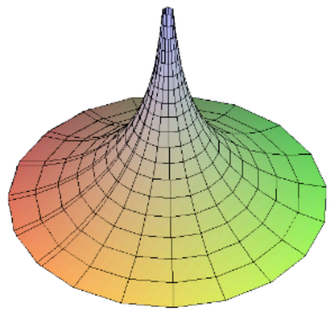

Figure 1 – La pseudosphère

Exercice 6. Soit S une surface régulière connexe et orientée par le champ normal unitaire $\mathbf{N}$. Un point $p \in S$ est *ombilical* si les deux courbures principales $k_{\max}(p)$ et $k_{\min}(p)$ coïncident.
(a) Montrer que si p est ombilical, alors $D\mathbf{N}(p)$ est un multiple $\lambda(p)$ de l'identité.
Nous supposons dès maintenant que chaque point de S est ombilical.
(b) Soit $\varphi : U_0 \to U$ un paramétrage local, U_0 connexe, et soient $\mathbf{N}_0 := \mathbf{N} \circ \varphi$ et $\lambda_0 := \lambda \circ \varphi$. Montrer que λ_0 est différentiable et satisfait aux équations

$$\begin{aligned} \partial_u \mathbf{N}_0(u,v) &= \lambda_0(u,v) \cdot \partial_u \varphi(u,v), \\ \partial_v \mathbf{N}_0(u,v) &= \lambda_0(u,v) \cdot \partial_v \varphi(u,v). \end{aligned} \tag{1}$$

(c) Montrer à l'aide des éqs. (1) que $\partial_u \lambda_0 \cdot \partial_v \varphi = \partial_v \lambda_0 \cdot \partial_u \varphi$. En déduire que λ est constante.
(d) Montrer que si $\lambda = 0$, alors S est contenue dans un plan.
(e) Montrer que si $\lambda \neq 0$, alors $p \mapsto p - \frac{1}{\lambda}\mathbf{N}(p)$ est constante égale à c, et que S est contenue dans $\{p \in \mathbb{R}^3 \, : \, \|p - c\| = 1/|\lambda|\}$.

Les géodésiques

Exercice 7 (Les géodésiques du cylindre)**.** Soit C le cylindre $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 = 1\}$.
(a) Montrer que les restrictions de

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to C, \quad (u,\theta) \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), u)$$

aux ouverts $\mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$ et $\mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ sont des paramétrages locaux de C.
(b) Montrer que les cercles $\gamma_{u_0} : \theta \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), u_0)$ et les droites $\delta_{\theta_0} : u \mapsto (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0), u)$ sont des géodésiques.
(c) Soit φ la restriction de Φ à l'ouvert $\mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$. Calculer E, F, G, e, f, g et les symboles de

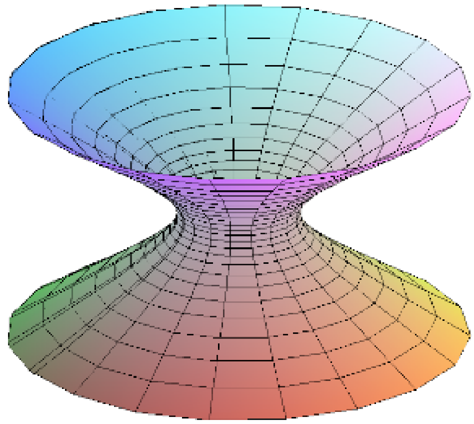

FIGURE 2 – Un hyperboloïde

Christoffel $\Gamma^u_{uu}, \Gamma^\theta_{uu}, \Gamma^u_{u\theta}, \Gamma^\theta_{u\theta}, \Gamma^u_{\theta\theta}, \Gamma^\theta_{\theta\theta}$. (Ici, comme d'habitude, nous choisissons l'orientation induite par le paramétrage local.)
(d) À l'aide des équations des géodésiques, trouver toutes les géodésiques de C.

Exercice 8. (a) Soit C une courbe régulière dans **xz** et soit $\alpha = (\rho, 0, \zeta) : I_0 \to C$ un paramétrage. Admettons que $\|\alpha'\| = 1$. Montrer que, pour chaque $\theta \in \mathbb{R}$, les méridiens

$$\alpha_\theta(u) := (\cos(\theta) \cdot \rho(u), \sin(\theta) \cdot \rho(u), \zeta(u))$$

sont des géodésique de la surface de rotation $S = \mathrm{Rot}(C)$.
(b) Montrer que, par contre, aucun parallèle

$$\tau_u : \theta \mapsto (\cos(\theta) \cdot \rho(u), \sin(\theta) \cdot \rho(u), \zeta(u)), \quad \rho(u) = e^{-u}, \ \zeta(u) = \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2\tau}}\, d\tau$$

de la pseudosphère **P** (voir exercice 3) est une géodésique de S.
(c) Remarquer que le fait constaté en (b) se généralise : Montrer qu'un parallèle (d'une surface de rotation quelconque) $\tau_u : \theta \mapsto (\cos(\theta) \cdot \rho(u), \sin(\theta) \cdot \rho(u), \zeta(u))$ est une géodésique si et seulement si la tangente à $\alpha : I_0 \to$ **xz** en u est parallèle à l'axe **z**.

Exercice 9. Décrire quatre géodésiques différentes de l'hyperboloïde d'une feuille (voir Fig. 2)

$$\mathbf{H} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - z^2 = 1 \right\}$$

qui passent par $(1, 0, 0)$.
Indications : Nous suggérons deux : sont des droites L_1 et L_2 qui passent par $(0, 0, 1)$ et sont totalement contenues dans **H**. Nous indiquons aussi que **H** peut être obtenue comme la rotation de $u \mapsto (\sqrt{1 + u^2}, 0, u)$ autour de l'axe **z**.

Exercice 10. Soit $h : S \to \overline{S}$ une isométrie. Montrer que si $\gamma : (a, A) \to S$ est une géodésique, alors $\overline{\gamma} := h \circ \gamma : (a, A) \to \overline{S}$ est aussi une géodésique. (Indication : D'après la première étape du théorème de Gauss sur la nature intrinsèque de la courbure, les symboles de Christoffel $\Gamma^u_{uu}, \Gamma^u_{uv}$, etc dépendent que de E, F, G et ses dérivées partielles.)

Exercice 11. Soit S une surface régulière et $\mathbf{N} : S \to \mathbf{S}$ une orientation. On admet que chaque géodésique de S est contenue dans un plan de $\mathbb{R}^3$. Le but de cet exercice est montrer que dans ce cas, pour chaque $p \in S$, $D\mathbf{N}(p)$ est un multiple de l'identité, i.e. $k_{\max}(p) = k_{\min}(p)$.

On fixe une géodésique $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ qui passe par p en $t = 0$ avec vélocité non–nulle, et on note P le plan qui la contient. On pose $N(t) := \mathbf{N}(\gamma(t))$ (vous pouvez admettre que $t \mapsto N(t)$ est différentiable.) Finalement, on écrit $P = c + V$, où V est un sous–espace de $\mathbb{R}^3$.

1. On admet que $\gamma''(0) \neq 0$. Montrez que $N(t) \in V$ pour chaque t proche à zéro.
2. On admet que $\gamma''(0) \neq 0$. Montrez que $\{N(0), \gamma'(0)\}$ est une base de V.
3. On admet que $\gamma''(0) \neq 0$. Montrez que $D\mathbf{N}_p \cdot \gamma'(0) = \lambda \cdot \gamma'(0)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. (λ peut être = 0.)
4. Montrez que si $\mathrm{II}_p(\gamma'(0)) \neq 0$, alors $\gamma''(0) \neq 0$. (Vous pouvez faire appel à une formule vue dans le cours.)

On applique les questions précédentes pour montrer que $k_{\min}(p) = k_{\max}(p)$. On fixe deux directions principales $\vec{w}_{\min}$ et $\vec{w}_{\max}$ associées aux courbures principales $k_{\min}(p)$ et $k_{\max}(p)$. On admet en plus que $\|\vec{w}_{\min}\| = \|\vec{w}_{\max}\| = 1$.

a) On admet que $D\mathbf{N}_p \neq 0$. (Autrement la preuve est terminée !) On pose

$$\vec{w}(\theta) = \cos(\theta) \cdot \vec{w}_{\min} + \sin(\theta) \cdot \vec{w}_{\max}.$$

Montrez qu'il existe un intervalle ouvert non–vide I de $[0, 2\pi]$ tel que

$$D\mathbf{N}_p \cdot \vec{w}(\theta) = \lambda_\theta \cdot \vec{w}(\theta), \qquad \forall\, \theta \in I.$$

b) Montrez que $k_{\min}(p) = k_{\max}(p)$.

Exercice 12. (i) Soient $\mathbf{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sphère, et $p = (0, 0, 1)$. On identifie $T_p\mathbf{S} = \mathbb{R} \cdot \vec{e}_1 + \mathbb{R} \cdot \vec{e}_2$ avec $\mathbb{R}^2$ de façon naturelle. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. En déduisez une expression ***explicite*** pour la géodésique $\gamma_{u,v} : \mathbb{R} \to \mathbf{S}$ qui passe par p avec vélocité (u, v) en $t = 0$.

(ii) Montrez qu'il existe un disque ouvert D centré à l'origine de $\mathbb{R}^2$ et un paramétrage $\Psi : D \to \mathbf{S}$ d'un voisinage ouvert de p tel que

$$\Psi(u, v) = \begin{cases} \gamma_{u,v}(1), & \text{où } \gamma_{u,v} \text{ est comme en (i) si } (u, v) \neq (0, 0) \\ p, & \text{si } (u, v) = (0, 0). \end{cases}$$

(Indication : Vous pouvez utiliser que les fonctions

$$f(u, v) = \frac{\sin\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \text{et} \quad g(u, v) = \cos\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right)$$

sont C^∞ et que

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 1,\\
g(0,0) &= 1,\\
\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) &= 0,\\
\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) &= 0,\\
\frac{\partial g}{\partial u}(0,0) &= 0,\\
\frac{\partial g}{\partial v}(0,0) &= 0,
\end{aligned}$$

pour vous aider dans les calculs.)

(iii) Soient $h_1, h_2 : \mathbf{S} \to \mathbf{S}$ deux isométries. Montrez, à l'aide de (ii), que si $h_1(p) = h_2(p)$ et $Dh_1(p) = Dh_2(p)$, alors $h_1 = h_2$ dans un voisinage ouvert de p.