Université de Paris 6
Géométrie Différentielle Élémentaire
LM 326
Janvier–Avril 2014.
`http://people.math.jussieu.fr/~dos-santos/Enseignement.html`

Feuille d'exercices n° 5

Les variétés abstraites

Exercice 1. Pour chaque $i \in \{0, \dots, n\}$, définissons

$$B_i := \left\{ (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \ : \sum_{k \neq i} x_k^2 < 1 \right\}.$$

(C'est simplement une façon de numéroter les coordonnées de la boule ouverte unitaire de $\mathbb{R}^n$.) Soient D_i les fonctions $\sqrt{1 - \sum_{k\neq i} x_k^2}$ sur B_i. Montrer que

$$\varphi_i^+ : B_i \to S^n, \quad (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, D_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

et

$$\varphi_i^- : B_i \to S^n, \quad (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, -D_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

sont des paramétrages locaux de S^n et qui appartiennent à l'atlas maximal obtenu par les projections stéréographiques.

Exercice 2. (a) Soit $\mathbb{C}P^n$ l'ensemble de droites complexes dans $\mathbb{C}^{n+1}$ qui passent par l'origine. En copiant la procédure faite pour $\mathbb{R}P^n$, donner à $\mathbb{C}P^n$ une structure de variété différentielle de dimension $2n$.

(b) Montrer que $\mathbb{C}P^1$ est difféomorphe à S^2.

Exercice 3. Soient $f : X \to Y$, et $g : Y \to Z$ des applications différentiables entre variétés différentiables. Montrer que $g \circ f$ est différentiable et pour chaque $x \in X$, nous avons

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x).$$

Exercice 4. Soient M et N des espaces topologiques. Un revêtement topologique est une application continue $f : M \to N$ qui satisfait les deux propriétés suivantes :

1. f est surjective.
2. Pour chaque $q \in N$, il existe un ouvert $V_q \subset N$ tel que $f^{-1}(V_q)$ est union disjointe d'ouverts $U_{q,\alpha} \subset M$ et la restriction de f à chaque $U_{q,\alpha}$ induit un homéomorphisme de $U_{q,\alpha}$ sur V_q.

Montrer que si N admet une structure de variété différentielle alors M admet aussi une telle structure et, avec cette structure, f est un difféomorphisme local.

Exercice 5. (a) Soit M une variété différentielle et $G \leq \mathrm{Diff}(M)$ un sous–groupe du groupe des difféomorphismes de M. On dit que G agit de façon *proprement discontinue* sur M, si pour chaque point $p \in M$, il existe un voisinage $U \ni p$ tel que $g(U) \cap U = \emptyset$ pour chaque $g \neq \mathrm{Id}$. On définit sur M la relation d'équivalence $p \sim q \Leftrightarrow$ il existe un $g \in G$ tel que $g(p) = q$. Soit $\pi : M \to M/G$ l'espace topologique quotient [1]. Montrer que M/G admet un atlas différentiable pour lequel π est un difféomorphisme local.

(b) Soit $M = \mathbb{R}^n$ et G_n le groupe des translations entières

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 + k_1, \cdots, x_n + k_n), \qquad (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Montrer que $\mathbb{R}^n/G$ est difféomorphe à $(S^1)^n$.

(c) Montrer que $\mathbb{R}^2/G_2$ est difféomorphe à la surface de rotation

$$\mathbb{T} = \{(2 + \cos(u)) \cdot \cos(v), (2 + \cos(u)) \cdot \sin(v), \sin(u)) \ : \ u, v \in \mathbb{R}\}.$$

(d) Soit S^n la sphère de dimension n et $A : S^n \to S^n$ le difféomorphisme $x \mapsto -x$. Montrer que $\mathbb{R}P^n$ (comme construit dans le cours) est difféomorphe à $S^n/\{\mathrm{id}, A\}$.

Les Immersions et les plongements

Exercice 6. A l'aide de l'application $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1}$

$$(u, v) \mapsto (u^n, \ldots, u^{n-k}v^k, \ldots, v^n)$$

construire une immersion f de $\mathbb{R}P^1$ dans $\mathbb{R}P^n$. Montrer que f est en fait un plongement.

Les vecteurs tangents

Exercice 7. Soit $p \in M$ un point d'une variété différentiable de dimension n et soit $f : W \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un voisinage W de p.

(a) Soit ξ un vecteur tangent et soient $[\varphi, v]_p = [\psi, w]$ deux représentations de ξ. Montrer que

$$\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial v}(\varphi^{-1}p) = \frac{\partial (f \circ \psi)}{\partial w}(\psi^{-1}p).$$

Cette équation nous permet de définir pour chaque $\xi \in T_pM$ et chaque fonction différentiable sur un voisinage quelconque de p un nombre réel que nous notons $\xi(f)$.

(b) Montrer que si $g : W \to \mathbb{R}$ est une autre fonction différentiable, alors $\xi(fg) = \xi(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \xi(g)$.

1. M/G est l'ensemble des classes d'équivalence et π est la fonction qui a chaque $x \in M$ associe sa classe d'équivalence. Un ensemble $V \subseteq M/G$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(V)$ est itou.

Exercice 8. Un champ de vecteurs sur une variété M de dimension n est une fonction qui a chaque $p \in M$ associe un vecteur tangent $X(p) \in T_pM$. Le champ X est dit différentiable si la condition suivante est satisfaite :

Diff Soit $\varphi : U_0 \to U$ un paramétrage quelconque d'un ouvert U de M et soient $a_j(p)$ des fonctions à valeurs réelles telles que $X(p) = \sum_j a_j(p) \cdot \partial_j\varphi(p)$. Alors les fonctions $a_j : U \to \mathbb{R}$ sont différentiables.

(a) Soient $\varphi : U_0 \to U$ et $\psi : V_0 \to V$ des paramétrages tels que $U \cap V \neq \emptyset$. Soit $p \in U \cap V$ et posons $\psi^{-1} \circ \varphi = F = (F_1, \ldots, F_n)$. Montrer que

$$\partial_j\varphi(p) = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\varphi^{-1}p) \cdot \partial_i\psi(p).$$

(b) En déduire que dans la condition **Diff** ci–dessus, il suffit de vérifier que les coefficients de X sont différentiables pour un ensemble de paramétrages $\varphi : U_{0\alpha} \to U_\alpha$ tel que $\cup U_\alpha = M$.