

# Géométrie différentielle élémentaire

João Pedro P. dos Santos

02 Mai 2016

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires et notations</b>	<b>4</b>
1.1	Le produit vectoriel . . . . .	4
1.2	Topologie . . . . .	4
1.3	Préliminaires du calcul différentiel . . . . .	4
1.4	Les courbes dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Surfaces régulières</b>	<b>6</b>
2.1	Définitions et exemples élémentaires . . . . .	6
2.2	Les graphes . . . . .	9
2.3	Les surfaces de niveau . . . . .	10
2.4	Les surfaces de rotation . . . . .	12
2.5	Les surfaces de niveau compactes et algébriques . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Le calcul différentiel sur les surfaces</b>	<b>17</b>
3.1	Différentiabilité d'une fonction à valeurs réelles . . . . .	17
3.2	Différentiabilité des fonctions entre deux surfaces . . . . .	19
3.3	L'espace tangent . . . . .	21
3.4	La dérivée d'une application différentiable entre surfaces . . . . .	22
3.5	Champs de vecteurs . . . . .	24
3.6	Les champs normaux et l'orientation . . . . .	26
3.7	Complément : les structures de surface de Riemann . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Longueurs et aires : la métrique</b>	<b>30</b>
4.1	La première forme fondamentale . . . . .	30

4.2	Les isométries . . . . .	30
4.3	Les aires . . . . .	32
4.4	Les angles . . . . .	33
<b>5</b>	<b>L'application normale de Gauss</b>	<b>35</b>
5.1	La deuxième forme fondamentale et la courbure de Gauss : propriétés basiques .	35
5.2	La détermination « mécanique » des courbures à partir des deux formes fondamentales . . . . .	38
5.3	Quelques exemples et méthodes calculatoires . . . . .	39
5.4	Le signe de la courbure . . . . .	41
5.5	Le théorème de Gauss sur la nature intrinsèque de la courbure . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Les géodésiques</b>	<b>47</b>
6.1	Définition . . . . .	47
6.2	Les équations des géodésiques . . . . .	48
6.3	La minimisation des distances . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Variétés abstraites</b>	<b>57</b>
7.1	Les outils du calcul différentiel . . . . .	57
7.2	Définitions et exemples de base . . . . .	58
7.3	Les applications différentiables . . . . .	63
7.4	Les vecteurs tangents . . . . .	64
7.5	La dérivée . . . . .	65
7.6	Les sous-variétés . . . . .	66
7.7	Le théorème d'inversion locale et ses conséquences . . . . .	68
7.8	Les plongements . . . . .	69

Les mathématiciens sont si habitués à leurs symboles et s'amuse si volontiers au jeu de ces symboles, qu'il faut peut-être leur enlever leurs jouets pour les forcer à penser.

Jules Tannery (cité par Émile Picard dans *La vie et l'oeuvre de Jules Tannery*).

# 1 Préliminaires et notations

## 1.1 Le produit vectoriel

Soient  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  et  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Leur produit vectoriel  $\vec{u} \times \vec{v}$  est défini par la formule

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2) \cdot \vec{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3) \cdot \vec{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1) \cdot \vec{e}_3.$$

Une façon plus mnémonique est d'interpréter  $\vec{u} \times \vec{v}$  comme un déterminant :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

## 1.2 Topologie

Soit  $X$  un espace topologique. Un voisinage d'un point  $p \in X$  est un ouvert  $U$  de  $X$  qui contient  $p$ .

**Avertissement :** Dans la littérature, les voisinages ne sont pas forcément ouverts, mais doivent simplement contenir un ouvert.

Si  $S$  note un sous-ensemble de  $X$ , nous munissons  $S$  de la topologie induite : les ouverts de  $S$  sont les sous-ensembles de  $S$  de la forme  $U \cap S$ , où  $U$  est un ouvert de  $X$ .

## 1.3 Préliminaires du calcul différentiel

Nous commençons les préliminaires avec un

**Avertissement :** Dans ce texte, une fonction  $h : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite **différentiable** si elle est de classe  $C^\infty$ . Cette convention, étrange aux yeux d'un étudiant qui a récemment fait un cours de Calcul différentiel, est usuelle en Géométrie différentielle.

Les théorèmes suivants sont centraux dans l'analyse mathématique. Leurs preuves peuvent être trouvés dans n'importe quel livre sérieux sur ce thème.

**Théorème 1** (La règle de la chaîne). Soient  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  et  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  des ouverts des espaces euclidiens et soient  $f : U \rightarrow V$ ,  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^l$  des fonctions différentiables. Alors,  $g \circ f$  est différentiable en  $U$ , et, pour chaque point  $p \in U$ , la dérivée de  $g \circ f$  en  $p$  est la composition

$$Dg(f(p)) \cdot Df(p) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l.$$

Ou, d'une façon plus explicite,

$$\frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(p) = \sum_{k=1}^l \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(p)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(p).$$

□

Une autre façon fort commode d'écrire la règle de la chaîne fait appel au concept de **matrice Jacobienne**. Si  $f$  est comme dans le théorème, la Jacobienne de  $f$  en  $p$  est la matrice

$$\text{Jac}(f)(p) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}.$$

La Règle de la Chaîne nous dit alors que

$$\text{Jac}(g \circ f)(p) = \text{Jac}(g)(f(p)) \cdot \text{Jac}(f)(p).$$

**Théorème 2** (Théorème d'inversion locale). *Soient  $U$  et  $V$  des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $h : U \rightarrow V$  une application différentiable. Si  $Dh(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un isomorphisme, alors il existe un voisinage  $U_0$  de  $p$  en  $U$  et un voisinage  $V_0$  de  $h(p)$  en  $V$  tels que  $h|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$  est un difféomorphisme.  $\square$*

Comme nous serons intéressés par des fonctions différentiables sur des ouverts de  $\mathbb{R}^2$ , nous allons adopter la

**Notation :** Si  $h : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction différentiable d'un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , les dérivées directionnelles  $Dh(p) \cdot e_1$  et  $Dh(p) \cdot e_2$  seront notées  $\partial_u h(p)$  et  $\partial_v h(p)$  respectivement.

## 1.4 Les courbes dans $\mathbb{R}^n$

Le présent paragraphe est utilisé pour fixer des notations et de la terminologie autour du thème des courbes.

**Définition 3.** (i) Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ . Une fonction différentiable (dans le sens adopté plus haut!)  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est appelée une **courbe différentiable**.

(ii) La vitesse de  $\alpha$  au point  $t_0 \in I$  est le vecteur  $\alpha'(t_0)$ .

(iii) La vitesse scalaire de  $\alpha$  au point  $t_0$  est le nombre réel  $\|\alpha'(t_0)\|$ .

(iv) L'accélération de  $\alpha$  au point  $t_0$  est le vecteur  $\alpha''(t_0)$ .

Si  $[a, A] \subseteq I$  et  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une courbe différentiable, la **longueur** de  $\alpha$  entre  $a$  et  $A$  est le nombre réel

$$\mathbf{L}_a^A(\alpha) := \int_a^A \|\alpha'(\tau)\| d\tau.$$

## 2 Surfaces régulières

### 2.1 Définitions et exemples élémentaires

**Définition 4.** Un sous-ensemble  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  est une surface régulière s'il existe, pour chaque point  $p \in S$ , un homéomorphisme  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  entre un ouvert  $U_0 \subseteq \mathbb{R}^2$  et un voisinage (ouvert, d'après nos conventions)  $U \subseteq S$  de  $p$  tel que :

**S1** L'application  $\varphi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est différentiable.

**S2** La matrice Jacobienne de  $\varphi$  a rang deux en chaque point de  $U_0$ .

Nous appelons  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  un paramétrage de  $U$ , ou un **paramétrage local de  $S$** .

Nous remarquons que la condition **S2** dans la définition est équivalente à « *le produit vectoriel*

$$\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi$$

*est différent de 0 partout* ».

*Exemple 5 (Le plan).* Soient  $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathbb{R}^3$  des vecteurs linéairement indépendants. Le plan

$$\text{Plan}(p; \vec{w}_1, \vec{w}_2) = p + \mathbb{R} \cdot \vec{w}_1 + \mathbb{R} \cdot \vec{w}_2$$

est une surface régulière avec un seul paramétrage :

$$\varphi(u, v) = p + u\vec{w}_1 + v\vec{w}_2,$$

(Le lecteur est invité à montrer que  $\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi \neq 0$ .)

■

*Exemple 6 (La sphère).* C'est l'ensemble

$$\mathbf{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Nous allons montrer que  $\mathbf{S}$  est une surface régulière par deux méthodes (qui utilisent des paramétrages différents).

(1) *Le paramétrage standard.* Soit  $B$  la boule ouverte de  $\mathbb{R}^2$  centrée à l'origine et de rayon 1. Posons, pour chaque  $(u, v) \in B$ ,

$$\varphi_{\pm}(u, v) = (u, v, \pm \sqrt{1 - u^2 - v^2}), \quad \psi_{\pm} = (u, \pm \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v), \quad \xi_{\pm}(u, v) = (\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v).$$

Tout d'abord, nous remarquons que ces fonctions sont toutes différentiables. Soient

$$H_{\text{nord}} = \{(x, y, z) \in \mathbf{S} \mid z > 0\} \quad \text{et} \quad H_{\text{sud}} = \{(x, y, z) \in \mathbf{S} \mid z < 0\}.$$

Il est clair que

$$\pi_{\text{nord}} : H_{\text{nord}} \rightarrow B, \quad (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

est l'inverse de  $\varphi_+$ . Le même peut être dit à propos de

$$\pi_{\text{sud}} : H_{\text{sud}} \rightarrow B, \quad (x, y, z) \mapsto (x, y)$$

et  $\varphi_-$ . Comme  $\varphi_{\pm}$  sont des fonctions différentiables (et a fortiori continues), il suit que  $\varphi_+$  et  $\varphi_-$  sont des homéomorphismes sur  $H_{\text{nord}}$  et  $H_{\text{sud}}$ . Exactement le même raisonnement montre que

$$\psi_+ : B \rightarrow \{(x, y, z) \in \mathbf{S} \mid y > 0\}, \quad \psi_- : B \rightarrow \{(x, y, z) \in \mathbf{S} \mid y < 0\}$$

et

$$\xi_+ : B \rightarrow \{(x, y, z) \in \mathbf{S} \mid x > 0\}, \quad \text{et} \quad \xi_- : B \rightarrow \{(x, y, z) \in \mathbf{S} \mid x < 0\}$$

sont des homéomorphismes. (En fait,  $\psi_{\pm}, \xi_{\pm}$  sont déduites des  $\varphi_{\pm}$  en permutant des coordonnées de  $\mathbb{R}^3$ .) Pour confirmer que  $\mathbf{S}$  est une surface, il suffit de prouver que le rang des matrices Jacobiennes

$$\text{Jac}(\varphi_+), \text{Jac}(\varphi_-), \text{Jac}(\psi_+), \text{Jac}(\psi_-), \text{Jac}(\xi_+), \text{Jac}(\xi_-)$$

en chaque  $(u, v) \in B$  est deux. Ce fait résulte d'un calcul direct :

$$(\partial_u \varphi_{\pm} \times \partial_v \varphi_{\pm})(u, v) = \left( \frac{\pm u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, \frac{\pm v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, 1 \right) \neq 0,$$

$$(\partial_u \psi_{\pm} \times \partial_v \psi_{\pm})(u, v) = \left( \frac{\mp u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, -1, \frac{\mp v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \right) \neq 0.$$

et

$$(\partial_u \xi_{\pm} \times \partial_v \xi_{\pm})(u, v) = \left( 1, \frac{\pm u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, \frac{\pm v}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \right) \neq 0.$$

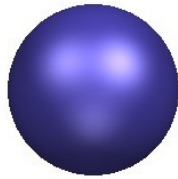


FIGURE 1 – La sphère

(2) *Les projections stéréographiques.* La projection stéréographique à partir du pôle nord  $(0, 0, 1)$  associe à chaque point  $p = (x, y, z)$  de  $\mathbf{S} \setminus \{(0, 0, 1)\}$  un point du plan  $\mathbb{R}^2$  de la façon suivante. Considérons la droite  $\ell_p$  dans l'espace qui joint  $(0, 0, 1)$  à  $p$ . C'est-à-dire, la droite

$$\ell_p : \lambda \cdot (x, y, z - 1) + (0, 0, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La projection stéréographique de  $p$  (à partir de  $(0, 0, 1)$ ) est le point  $\pi_+(x, y, z)$  où  $\ell_p$  coupe le plan  $xy$ . (Voir figure 2.) Un calcul direct montre que

$$\pi_+(x, y, z) = \left( \frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}, 0 \right).$$

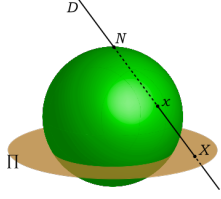


FIGURE 2 – La projection stéréographique–Auteur : S. Martin

De façon analogue, nous pouvons considérer la procédure inverse : trouver le seul point de  $\mathbf{S} \setminus \{(0, 0, 1)\}$  sur la droite

$$m_{(u,v)} : \mu \cdot (u, v, -1) + (0, 0, 1), \quad \mu \in \mathbb{R}$$

qui joint  $(0, 0, 1)$  au point  $(u, v, 0)$ . La réponse est

$$\sigma_+(u, v) = \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

À l'aide des formules ci-dessus, nous concluons que  $\sigma_+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{S} \setminus \{(0, 0, 1)\}$  est un homéomorphisme.

Pour montrer que

$$\text{rang Jac}(\sigma_+) = 2,$$

nous pouvons procéder par un calcul direct ; mais une autre façon plus nette est de remarquer que  $\pi_+$  est une fonction différentiable de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 1\}$  en  $\mathbb{R}^2$  et appliquer la règle de la chaîne à la formula  $\pi_+ \circ \sigma_+(u, v) = (u, v, 0)$ . Explicitement :

$$\text{Jac}(\pi_+)(\sigma_+(u, v)) \cdot \text{Jac}(\sigma_+)(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est donc clair que  $\text{rang Jac}(\sigma_+)(u, v) = 2$ . Bien sûr, nous pouvons appliquer la même procédure au pôle sud  $(0, 0, -1)$  et trouver des projections

$$\pi_-(x, y, z) = \left( \frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}, 0 \right)$$

et

$$\sigma_-(u, v) = \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{1 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2 + 1} \right).$$

Comme

$$(\mathbf{S} \setminus \{(0, 0, 1)\}) \cup (\mathbf{S} \setminus \{(0, 0, -1)\}) = \mathbf{S},$$

nous avons montré que  $\mathbf{S}$  est une surface régulière. ■

L'exemple suivant, dont les détails sont laissés à la charge du lecteur, donne encore un autre famille de paramétrages locaux de  $\mathbf{S}$ .



*Exemple 7* (Un autre paramétrage de  $\mathbf{S}$ ). C'est le paramétrage par la longitude (distance angulaire entre un méridien et le méridien de Greenwich) et la latitude (la distance angulaire entre l'équateur et un tropique). Définissons

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{S}, \quad (u, \theta) \mapsto (\cos u \cos \theta, \cos u \sin \theta, \sin u).$$

C'est à dire,  $\varphi(u, \theta)$  est obtenu en tournant le point  $(\cos u, 0, \sin u)$  d'un angle  $\theta$  (le sens anti-horaire) autour de l'axe  $\mathbf{z}$ . Un calcul direct nous donne

$$\partial_u \varphi \times \partial_\theta \varphi = -\varphi(u, \theta) \cos u,$$

et par conséquent

$$\|\partial_u \varphi \times \partial_\theta \varphi\| = \cos u.$$

Il est possible de montrer que la restriction de  $\varphi$  à des carrés ouverts de  $\mathbb{R}^2$  convenablement choisis définit un paramétrage local de  $\mathbf{S}$ . ■

## 2.2 Les graphes

Soit  $h : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable sur un ouvert  $U_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ . Le graphe de  $h$ ,

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in U_0 \times \mathbb{R} \mid z = h(x, y)\}$$

est une surface régulière : un unique paramétrage est  $\varphi : U_0 \rightarrow \Gamma$ , où

$$\varphi(u, v) = (u, v, h(u, v)).$$

Vérifions cette dernière affirmation. Il est clair que  $\varphi$  est un homéomorphisme, car la restriction de la projection  $(x, y, z) \mapsto (x, y)$  donne l'inverse de  $\varphi$ . Comme

$$\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi = (1, 0, \partial_u h) \times (0, 1, \partial_v h) = (-\partial_u h, -\partial_v h, 1),$$

il suit immédiatement que le rang de  $\text{Jac}(\varphi)(u, v)$  est toujours 2.

En fait, localement, une surface régulière est toujours un graphe.

**Proposition 8.** *Soit  $S$  une surface régulière et  $p \in S$ . Il existe une permutation des coordonnées de  $\mathbb{R}^3$ , un voisinage  $V$  de  $p$  en  $S$ , un ouvert  $W_0$  de  $\mathbb{R}^2$ , et une fonction différentiable  $h : W_0 \rightarrow \mathbb{R}$  telles que*

$$V = \{(x, y, h(x, y)) \in W_0 \times \mathbb{R} \mid z = h(x, y)\}.$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : U_0 \rightarrow U$  un paramétrage de  $S$  tel que  $p \in U$ , et soit  $p_0 = \varphi^{-1}(p)$ . Comme  $\text{Jac}(\varphi)$  est de rang deux en  $p_0$ , après une permutation des coordonnées de  $\mathbb{R}^3$ , nous pouvons admettre que

$$\det \begin{pmatrix} \partial_u \varphi_1 & \partial_v \varphi_1 \\ \partial_u \varphi_2 & \partial_v \varphi_2 \end{pmatrix} (p_0) \neq 0.$$

Par le théorème d'inversion locale, la restriction de  $(\varphi_1, \varphi_2)$  à un certain voisinage  $V_0$  de  $p_0$  définit un difféomorphisme sur un ouvert  $W_0$  de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $\xi : W_0 \rightarrow V_0$  le difféomorphisme inverse. Pour chaque  $(s, t) \in W_0$ , nous avons

$$\begin{aligned}\varphi \circ \xi(s, t) &= (\varphi_1 \circ \xi(s, t), \varphi_2 \circ \xi(s, t), \varphi_3 \circ \xi(s, t)) \\ &= (s, t, \varphi_3 \circ \xi(s, t)) \\ &= (s, t, h(s, t)).\end{aligned}\tag{9}$$

Si  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  est tel que  $(x, y) \in W_0$  et  $z = \varphi_3 \circ \xi(x, y)$ , alors les équations (9) montrent que  $(x, y, z) = \varphi \circ \xi(x, y) \in \varphi(V_0)$ . Réciproquement, si  $(x, y, z) = \varphi(u, v) \in \varphi(V_0)$ , nous pouvons écrire  $(x, y, z) = \varphi \circ \xi(s, t)$ , d'où  $x = s$ ,  $y = t$ ,  $z = \varphi_3 \circ \xi(x, y)$ , et  $(x, y) \in W_0$ . Nous avons prouvé que

$$\varphi(V_0) = \{(x, y, z) \in W_0 \times \mathbb{R} \mid z = \varphi_3 \circ \xi(x, y)\},$$

et la preuve est achevée en posant  $V = \varphi(V_0)$ . □

### 2.3 Les surfaces de niveau

Une classe importante d'exemples est donnée par les **surfaces de niveau** : c'est-à-dire, les surfaces définies par les images inverses des valeurs régulières.

**Proposition 10.** (a) Soit  $W \subseteq \mathbb{R}^3$  un ouvert et  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable, et soit  $a \in \mathbb{R}$  tel que

$$\nabla f(p) = (\partial_x f(p), \partial_y f(p), \partial_z f(p)) \neq 0, \quad \forall p \in f^{-1}(a).$$

(Un tel  $a$  est dit un valeur régulière de  $f$ .) Alors  $S = f^{-1}(a)$  est une surface régulière.

*Démonstration.* Soit  $p \in f^{-1}(a)$ . Admettons que  $\frac{\partial}{\partial z} f(p) \neq 0$  et considérons la fonction

$$F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z)).$$

Il suit que  $\det DF(p) \neq 0$ . Soit  $U$  voisinage de  $p$  et  $C$  un cube centré en  $(p_1, p_2, a)$  :

$$\{(\xi, \eta, \zeta) : |\xi - p_1| < \varepsilon, |\eta - p_2| < \varepsilon, |\zeta - a| < \varepsilon\}$$

tel que  $F|_U : U \rightarrow C$  soit un difféomorphisme. Notons  $G$  l'inverse de  $F$ . Nous affirmons que

$$F(f^{-1}(a) \cap U) = \{(\xi, \eta, \zeta) \in C : \zeta = a\},$$

c'est à dire, l'image de  $f^{-1}(a) \cap U$  par  $F$  n'est rien d'autre que un plan. Pour chaque  $(\xi, \eta, a) \in C$ , il existe un  $(x, y, z) \in U$  tel que  $F(x, y, z) = (\xi, \eta, a)$ . Par définition de  $f$ , il suit que  $f(x, y, z) = a$ , et donc  $F(f^{-1}(a) \cap U)$  contient  $\{(\xi, \eta, \zeta) \in C : \zeta = a\}$ . L'autre inclusion est encore plus facile. Nous avons terminé la preuve de l'affirmation. Il est maintenant clair que  $f^{-1}(a)$  est une surface régulière, car le plan en est une et  $F$  est un difféomorphisme. □

À l'aide de la Proposition 10, nous pouvons construire plusieurs exemples de surfaces régulières. D'après ce point de vue, les surfaces régulières les plus simples sont les plans (voir l'Exemple 5), car ils peuvent être décrits par des équations de la forme

$$ax + by + cz = \alpha.$$

Soit  $Q$  un polynôme en  $x, y, z$  de degré deux. L'ensemble

$$Q^{-1}(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : Q(x, y, z) = 0\}$$

est appelé une **quadrique**. Si 0 est une valeur régulière de la fonction  $Q$ , nous dirons que  $Q^{-1}(0)$  est une **quadrique régulière**.

*Exemple 11.* (Voir fig. 3) Soient  $p, q, r$  des nombres réels tels que  $p^2 + q^2 + r^2 > 0$ . L'ellipsoïde  $E(p, q, r)$  est la quadrique régulière

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1 \right\}.$$

(Le lecteur est invité à montrer que  $E(p, q, r)$  est effectivement une quadrique régulière.)

■

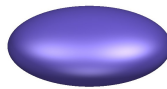


FIGURE 3 – Un ellipsoïde

*Exemple 12* (Les hyperboloïdes). (Voir figs. 4 et 5) Soient  $p, q, r$  des nombres réels tels que  $p^2 + q^2 + r^2 > 0$ . L'hyperboloïde d'une feuille  $H(p, q, r)$  est la quadrique

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} - \frac{z^2}{r^2} = 1 \right\}.$$

(Le lecteur est invité à montrer que  $H(p, q, r)$  est une quadrique régulière.) L'hyperboloïde de deux feuilles est la quadrique

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1 \right\}.$$

(Le lecteur est invité à montrer que c'est une quadrique régulière.)

■

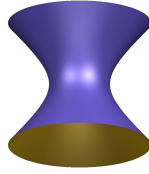


FIGURE 4 – Un hyperboloïde d’une feuille :  $x^2 + y^2 - z^2 = 10$

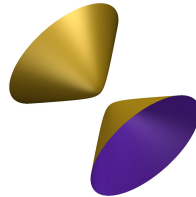


FIGURE 5 – Un hyperboloïde de deux feuilles :  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$

## 2.4 Les surfaces de rotation

Les surfaces de rotation sont les surfaces régulières obtenues à partir de la rotation d’une courbe plane. Pour bien comprendre cette classes de surfaces, nous devons méditer un peu sur le concept de « courbe », qui différera de celle adopté dans le reste du texte. Plus précisément nous exigeons que la courbe elle même soit une espèce de surface de dimension un.

Nous copions la définition de surface régulière en changeant  $\mathbb{R}^2$  par  $\mathbb{R}$  : Un sous-ensemble  $C \subseteq \mathbb{R}^3$  (ou  $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ) est une **courbe régulière** s’il existe, pour chaque point  $p \in C$ , un homéomorphisme  $\alpha : I_0 \rightarrow I$  entre un ouvert  $I_0 \subseteq \mathbb{R}$  et un voisinage  $I \subseteq C$  de  $p$  tel que :

**C1** L’application  $\alpha : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est de classe  $C^\infty$ .

**C2** La dérivée  $\alpha'$  est partout non-nulle.

Les fonctions  $\alpha$  s’appellent **paramétrages** locaux.

*Exemple 13.* Soit

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

le cercle. Les fonctions

$$\alpha = (\cos, \sin) : (-\pi, +\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \beta = (\cos, \sin) : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

sont des paramétrages locaux (utiliser les coordonnées polaires pour montrer que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des homéomorphismes sur leurs images). Il suit que  $C$  est une surface régulière. Le lecteur est aussi invité à montrer que la projection stéréographique inverse  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow C \setminus \{(0, 1)\}$  est également un paramétrage.

*Exemple 14.* Soit  $h : (a, A) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable. Son graphe,  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ , est une courbe régulière ayant un seul paramétrage.

Soit alors  $C \subseteq \mathbb{R}^3$  une courbe régulière entièrement contenue dans le plan  $\mathbf{xz}$ . Supposons, en plus, que  $C$  ne coupe pas l'axe  $\mathbf{z}$ . Définissons  $\text{Rot}(C)$  comme l'ensemble de points de  $\mathbb{R}^3$  de la forme  $(p_1 \cos \theta, p_1 \sin \theta, p_3)$ , où  $(p_1, 0, p_3) \in C$  et  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Si

$$\alpha = (\rho, 0, \zeta) : I_0 \rightarrow I \subseteq C$$

un paramétrage local de  $C$  et  $J$  un intervalle *ouvert* de longueur  $2\pi$ , nous écrivons

$$\varphi_{\alpha, J} : I_0 \times J \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi_{\alpha, J}(u, \theta) = (\rho(u) \cos(\theta), \rho(u) \sin(\theta), \zeta(u)).$$

Bien sûr, le lecteur profitera de l'usage des nombres complexes pour se rappeler de la définition de  $\varphi_{\alpha, J}$  :

$$\varphi_{\alpha, J} = (\rho(u) \cdot e^{i\theta}, \zeta(u)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3. \quad (15)$$

**Lemme 16.** *Rot(C) est une surface régulière et  $\varphi := \varphi_{\alpha, J}$  est un paramétrage local. En plus, nous avons la formule*

$$\|\partial_u \varphi(u, \theta) \times \partial_\theta \varphi(u, \theta)\|^2 = \rho^2(u) \cdot \|\alpha'(u)\|.$$

*Démonstration.* Comme  $\alpha$  est injective et  $J$  est ouvert de longueur  $2\pi$ , il est facile de conclure que  $\varphi = \varphi_{\alpha, J}$  est aussi injective. (Le lecteur devra faire un dessin, ou utiliser la formule (15).)

Pour montrer que  $\text{rang Jac}(\varphi) = 2$ , nous faisons un calcul direct :

$$\begin{aligned} \partial_u \varphi(u, \theta) &= (\rho'(u) \cos(\theta), \rho'(u) \sin(\theta), \zeta'(u)); \\ \partial_\theta \varphi(u, \theta) &= (-\rho(u) \sin(\theta), \rho(u) \cos(\theta), 0); \\ \|\partial_u \varphi(u, \theta) \times \partial_\theta \varphi(u, \theta)\|^2 &= \rho^2(u) \cdot (\rho'(u)^2 + \zeta'(u)^2). \end{aligned}$$

Comme  $\rho(u) > 0$  et  $\|\alpha'(u)\|^2 = \rho'(u)^2 + \zeta'(u)^2 \neq 0$  pour chaque  $u \in I_0$ , il suit que  $\partial_u \varphi$  et  $\partial_\theta \varphi$  sont linéairement indépendants.

La preuve de la continuité de  $\varphi^{-1}$  est un simple exercice à l'aide des coordonnées *cylindriques*. Nous laissons cette partie comme exercice.

Comme chaque point de  $C$  appartient à l'image d'un paramétrage local, nous en déduisons qu'un point arbitraire de  $\text{Rot}(C)$  appartient toujours à l'image d'un certain  $\varphi_{\alpha, J}$ .  $\square$

Voici quelques exemples.

*Exemple 17.* Soit  $C$  le cercle centré en  $(2, 0, 0)$  et de rayon 1 dans le plan  $\mathbf{xz}$ . Il y en a deux paramétrages locaux de  $C$  définis par la restriction à  $(-\pi, \pi)$  et à  $(0, 2\pi)$  de

$$u \mapsto (2 + \cos(u), 0, \sin(u)).$$

Donc, nous avons besoin de quatre paramétrages locaux pour couvrir le tore  $\mathbf{T} := \text{Rot}(C)$  (en fait, nous sommes capables de le faire avec trois déjà). Ils sont donnés par des restrictions de

$$(u, \theta) \mapsto ((2 + \cos(u)) \cos(\theta), (2 + \cos(u)) \sin(\theta), \sin(u))$$

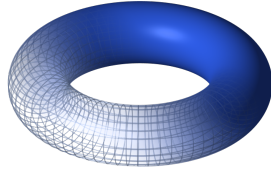


FIGURE 6 – Le tore

(ou sous forme complexe  $(u, v) \mapsto ([2 + \cos(u)] \cdot \exp(i\theta), \sin(u)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ ) aux carrés

$$C = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi), \quad C + (0, \pi) = (-\pi, \pi) \times (0, 2\pi), \\ C + (\pi, 0) = (0, 2\pi) \times (-\pi, \pi), \quad C + (\pi, \pi) = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi).$$

■

## 2.5 Les surfaces de niveau compactes et algébriques

Dans le présent paragraphe<sup>1</sup>, nous allons discuter comment construire de façon très simple des surfaces régulières (dans  $\mathbb{R}^3$ ) et compactes. Un résultat que n'importe quel géomètre connaît est la classification des surfaces régulières compactes (orientables, voir §3.6) par leur *genre*. Le genre d'une surface régulière compacte est le nombre de « trous » que elle a (voir Fig. 7). Il existe (heureusement!) une façon plus précise de nuancer le contenu géométrique de la dernière phrase, mais comme ce paragraphe est dédié aux exemples explicites, nous allons nous contenter de donner trois références au lecteur qui souhaite s'approfondir : [5], [2] et [3].

**Théorème de classification.** Soient  $S \subset \mathbb{R}^3$  et  $S' \subset \mathbb{R}^3$  des surfaces régulières et compactes de genre  $g$ . Alors  $S$  est difféomorphe à  $S'$ . □

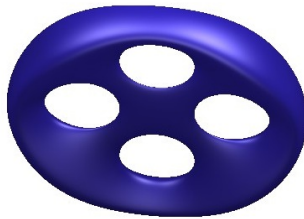


FIGURE 7 – Une surface compacte de genre 4

Notre but est d'utiliser la Proposition 10 pour construire la famille d'exemples suivante.

1. Le coeur est l'Exemple 18, qui m'a été communiqué par E. Brugallé.

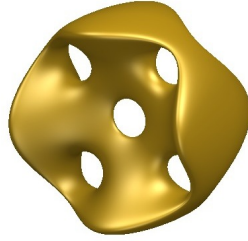


FIGURE 8 – Genre 5

*Exemple 18.* Soient  $(a_1, b_1), \dots, (a_g, b_g)$  des points de  $\mathbb{R}^2$  et  $r_1, \dots, r_g$  des nombres réels strictement positifs. Définissons des polynômes réels à deux variables comme suit

$$c_k(x, y) = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 - r_k^2,$$

et supposons que chacun des cercles

$$C_k := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c_k(x, y) = 0\}$$

est contenu en dehors des autres, i.e. si  $(x, y) \in C_l$  alors  $(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 > r_k^2$ . Soit maintenant  $C_{g+1}$  un cercle centré à l'origine et de rayon  $r_{g+1}$  qui contient chacun des cercles  $C_k$  dans son intérieur (voir Fig. 9). Posons  $c_{g+1}(x, y) = r_{g+1}^2 - x^2 - y^2$ .

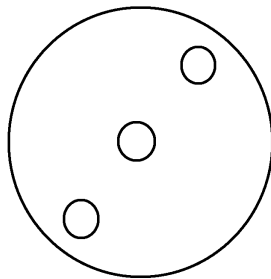


FIGURE 9 –

*Affirmation :* Soit

$$P(x, y) = c_1(x, y) \cdots c_g(x, y) \cdot c_{g+1}(x, y).$$

Alors l'ensemble

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda^2 z^2 = P(x, y)\}, \quad \lambda \neq 0$$

est une surface régulière compacte et connexe avec  $g$  « trous ».

La preuve, bien sûr, utilise la Proposition 10. Soit  $h := P(x, y) - \lambda z^2$ . Nous voulons montrer que si  $p = (\xi, \eta, \zeta) \in S$ , alors  $\nabla h(\xi, \eta, \zeta) \neq 0$ . Comme  $\partial_z h = -2\lambda\zeta$ , il suit que  $\nabla h \neq 0$  si  $\zeta \neq 0$ . Nous supposons maintenant que  $\zeta = 0$ . Pour que  $(\xi, \eta, 0)$  soit dans  $S$ , il faut que  $P(\xi, \eta) = 0$ ; par conséquent, il existe un  $k \in \{1, \dots, g+1\}$  tel que  $c_k(\xi, \eta) = 0$ . Comme les cercles  $C_k$  sont disjoints,  $(\xi, \eta)$  peut appartenir à seulement un  $C_{k_0}$ . Comme

$$\begin{aligned}\partial_x h &= \frac{\partial c_1}{\partial x} \cdot c_2 \cdots c_{g+1} + \cdots + c_1 \cdots c_g \cdot \frac{\partial c_{g+1}}{\partial x} \\ \partial_y h &= \frac{\partial c_1}{\partial y} \cdot c_2 \cdots c_{g+1} + \cdots + c_1 \cdots c_g \cdot \frac{\partial c_{g+1}}{\partial y},\end{aligned}$$

nous concluons que

$$\begin{aligned}\partial_x h(\xi, \eta) &= c_1(\xi, \eta) \cdots c_{k_0-1}(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial c_{k_0}}{\partial x}(\xi, \eta) \cdot c_{k_0+1}(\xi, \eta) \cdots c_{g+1}(\xi, \eta) \\ &= \pm 2(\xi - x_{k_0}) \cdot \gamma \\ \partial_y h(\xi, \eta) &= c_1(\xi, \eta) \cdots c_{k_0-1}(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial c_{k_0}}{\partial y}(\xi, \eta) \cdot c_{k_0+1}(\xi, \eta) \cdots c_{g+1}(\xi, \eta) \\ &= \pm 2(\eta - y_{k_0}) \cdot \gamma,\end{aligned}$$

avec  $\gamma \neq 0$ . Une fois que le centre du cercle  $C_{k_0}$  n'appartient pas à  $C_{k_0}$ , il suit que  $\nabla h(\xi, \eta) \neq 0$ .

Nous montrons maintenant que  $S$  est compacte. Si  $\|(\xi, \eta)\|^2 > r_{g+1}$ , alors  $c_{g+1}(\xi, \eta) < 0$  tandis que  $c_k(\xi, \eta) > 0$  pour chaque  $k = 1, \dots, g$ . Par conséquent,  $P(\xi, \eta) < 0$ ; il suit qu'un point  $(\xi, \eta, \zeta) \in S$  doit forcément satisfaire  $\xi^2 + \eta^2 \leq r_{g+1}^2$ . Le nombre réel  $|\lambda\zeta|$  doit être inférieur ou égal à une borne supérieure de la fonction  $\sqrt{|P|}$  sur l'intérieur de  $C_{g+1}$ , et nous avons montré que  $S$  est compacte. (Le lecteur remarquera aussi que il n'y a aucun point de  $S$  au-dessus d'un point à l'intérieur de un des cercles  $C_1, \dots, C_g$ , car le polynôme  $P$  est strictement négatif dans ces régions.) Comme nous n'avons pas développé les outils mathématiques pour justifier soigneusement la dernière affirmation dans l'énoncé, il est plus intéressant de laisser le lecteur avec l'exemple donné par la Fig. 8 : c'est le cas  $g = 5$ ,  $(a_1, b_1) = (-2, 0)$ ,  $(a_2, b_2) = (2, 0)$ ,  $(a_3, b_3) = (0, -2)$ ,  $(a_4, b_4) = (0, 2)$ ,  $(a_5, b_5) = (0, 0)$  avec  $r_1 = \cdots = r_4 = 1/2$ ,  $r_{5+1} = \sqrt{8}$  et  $\lambda = 100$ .

■



### 3 Le calcul différentiel sur les surfaces

#### 3.1 Différentiabilité d'une fonction à valeurs réelles

Le but du présent paragraphe est définir les fonctions différentiables entre les surfaces régulières. La clé pour cette définition est la proposition suivante.

**Proposition 19.** Soient  $S$  une surface,  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  un paramétrage local et  $f : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^3$  une fonction différentiable telle que  $f(V) \subset U$ . Alors

$$\varphi^{-1} \circ f : V \rightarrow U_0$$

est différentiable.

*Démonstration.* Soit  $p = \varphi(p_0)$ . Comme  $\text{rang Jac}(\varphi)(p_0) = 2$ , nous pouvons supposer que

$$\det \begin{pmatrix} \partial_u \varphi_1 & \partial_v \varphi_1 \\ \partial_u \varphi_2 & \partial_v \varphi_2 \end{pmatrix} (p_0) \neq 0$$

Donc, par le Théorème de l'inversion locale, il existe un voisinage ouvert  $D$  de  $p_0$  où

$$(\varphi_1, \varphi_2) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$$

définit un difféomorphisme sur son image  $E \subseteq \mathbb{R}^2$ . On note  $(\psi_1, \psi_2) : E \rightarrow D$  son inverse. Pour chaque  $(w, z) \in E$ , nous avons

$$\varphi(\psi_1(w, z), \psi_2(w, z)) = (w, z, \varphi_3(\psi_1(w, z), \psi_2(w, z)));$$

autrement dit,

$$(\psi_1(w, z), \psi_2(w, z)) = \varphi^{-1}(w, z, \varphi_3(\psi_1(w, z), \psi_2(w, z))).$$

Si  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \in \varphi(D)$ , il existe un point  $(w, z) \in E$  tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= \varphi(\psi_1(w, z), \psi_2(w, z)) \\ &= (w, z, \varphi_3(\psi_1(w, z), \psi_2(w, z))). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour chaque  $x \in f^{-1}(\varphi(D))$ , nous en déduisons

$$f_3(x) = \varphi_3(\psi_1(f_1(x), f_2(x)), \psi_2(f_1(x), f_2(x))),$$

et

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(f(x)) &= \varphi^{-1}((f_1(x), f_2(x), f_3(x))) \\ &= (\psi_1(f_1(x), f_2(x)), \psi_2(f_1(x), f_2(x))). \end{aligned}$$

Comme chacune des  $f_i : V \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable, il suit que  $\varphi^{-1} \circ f$  est différentiable en  $f^{-1}(\varphi(D))$ . Une fois que  $p \in \varphi(D)$  est arbitraire,  $\varphi^{-1} \circ f$  est différentiable.  $\square$

**Corollaire 20** (Très important!). Soient  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  et  $\psi : V_0 \rightarrow V$  des paramétrages locaux de  $S$ . Alors

$$\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(U \cap V) \rightarrow \psi^{-1}(U \cap V)$$

est un difféomorphisme.

*Démonstration.* Le rôle de  $\varphi$  et de  $\psi$  est interchangeable et  $\varphi^{-1} \circ \psi$  est la fonction inverse de  $\psi^{-1} \circ \varphi$ . Donc, il suffit de prouver que  $\psi^{-1} \circ \varphi$  est une application différentiable. Mais, par définition d'un paramétrage,  $\varphi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une fonction  $C^\infty$  et la proposition nous montre que la restriction  $\psi^{-1} \circ \varphi$  est de classe  $C^\infty$  où elle est définie.  $\square$

*Exemple 21.* Soient  $\varphi_+ : B \rightarrow \{(x, y, z) \in \mathbf{S} \mid z > 0\}$  et  $\psi_+ : B \rightarrow \{(x, y, z) \in \mathbf{S} \mid y > 0\}$  les paramétrages locaux définis dans l'Exemple 6–(1) :

$$\varphi_+(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}), \quad \psi_+(u, v) = (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v).$$

( $B$  est la boule ouverte de rayon 1 centrée à l'origine en  $\mathbb{R}^2$ .) Alors

$$\varphi_+^{-1}(\{(x, y, z) \in \mathbf{S} \mid y, z > 0\}) = \{(u, v) \in B \mid v > 0\},$$

et le changement de paramétrage est

$$\psi_+^{-1} \circ \varphi_+ : (u, v) \mapsto (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}).$$

■

Le Corollaire 20 possède une importance théorique considérable. Il nous permettra de définir plus loin **les variétés différentielles abstraites**. Pour l'instant, il nous permet de définir les fonctions différentiables.

Posons-nous le problème de définir une fonction différentiable  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  sur une surface régulière. Comme nous le savons du calcul différentiel, une fonction est différentiable si, et seulement si, elle est localement différentiable, ce qui nous permet de nous concentrer dans la définition de différentiabilité autour d'un point  $p \in S$ . Une fois que le principe fondamental de la Géométrie différentielle est qu'une surface est localement « décrite » par un paramétrage local, nous pouvons avancer :

**Définition 22.** Soit  $S$  une surface régulière. Une fonction  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  est différentiable autour du point  $p$  s'il existe un paramétrage  $\varphi : U_0 \rightarrow U$ ,  $U$  un voisinage de  $p$ , tel que  $f \circ \varphi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  est différentiable.

Il y a, a priori, un défaut avec la Définition 22 : nous avons fait un choix d'un paramétrage local  $\varphi$ . Mais le Corollaire 20 enlève toute ambiguïté, car

$$f \circ \varphi(q) = f \circ \psi \circ \underbrace{(\psi^{-1} \circ \varphi)}_{\text{difféomorphisme}}(q) \tag{23}$$

pour tout  $q$  dans un voisinage de  $p$ . Il suit que si  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  est différentiable, les **expressions locales**

$$f \circ \psi^{-1} : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sont différentiables pour n'importe quel paramétrage  $\psi : V_0 \rightarrow V \subseteq S$ .

Le lecteur peut maintenant fabriquer une quantité de fonctions différentiables sur une surface  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  à partir des fonctions coordonnées  $x : S \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y : S \rightarrow \mathbb{R}$  et  $z : S \rightarrow \mathbb{R}$ ; aucune difficulté doit surgir dans la preuve du

**Lemme 24.** *Soit  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable. Alors sa restriction à  $S$  est aussi une fonction différentiable.* □

### 3.2 Différentiabilité des fonctions entre deux surfaces

Nous considérons maintenant des fonctions à valeurs dans une autre surface régulière et nous posons la question de définir raisonnablement la *différentiabilité*.

**Définition 25.** Soit  $f : S \rightarrow S'$  une fonction entre deux surfaces régulières. Nous dirons que  $f$  est différentiable si la fonction évidente  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  déduite de  $f$  l'est.

Il y en a un côté positif et un négatif — comme dans la plupart de nos actions d'ailleurs — dans la définition. Le côté positif est clair : c'est l'économie ; nous avons utilisé un minimum de technique et jargon. Le côté négatif est plus difficile à comprendre, mais il est sérieux : il met trop d'importance sur le rôle joué par  $\mathbb{R}^3$ . C'est une attitude nocive pour les développements futurs de la Géométrie différentielle « abstraite ».

Nous avançons alors une autre définition :

**Définition 26.** Soient  $S$  et  $S'$  des surfaces régulières et soit  $f : S \rightarrow S'$  une fonction. Nous disons que  $f$  est différentiable si, pour chaque point  $p \in S$ , il existe des voisinages paramétrés  $\varphi : U_0 \rightarrow U \subseteq S$  et  $\varphi' : U'_0 \rightarrow U' \subseteq S'$  tels que

- a)  $p \in U$ ,
- b)  $f(U) \subseteq U'$  et,
- c)  $\varphi'^{-1} \circ f \circ \varphi : U_0 \rightarrow U'_0$  est différentiable.

Dans la définition précédente, nous avons supposé l'existence de **un couple** de paramétrages  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  et  $\varphi' : U'_0 \rightarrow U'$  tels que  $(\varphi')^{-1} \circ f \circ \varphi$  soit différentiable. Le Corollaire 20 (encore une autre fois !) garantit que le même peut être dit de n'importe quel autre couple  $\psi, \psi'$  de paramétrages locaux ; la preuve est obtenue aisément à partir de l'égalité

$$\psi'^{-1} \circ f \circ \psi = \underbrace{\psi'^{-1} \circ \varphi'}_{\text{difféomorphisme}} \circ \underbrace{\varphi'^{-1} \circ f \circ \varphi}_{\text{expression locale de } f} \circ \underbrace{\varphi^{-1} \circ \psi}_{\text{difféomorphisme}} .$$

La Définition 26 doit être poétisée de la façon suivante : **Une fonction  $f : S \rightarrow S'$  est différentiable quand, lue localement sur les paramétrages de  $S$  et  $S'$ , elle est différentiable.**

Bien sûr, nous avons

**Proposition 27.** *Les définitions 25 et 26 équivalent.*

*Démonstration.* Soit  $f : S \rightarrow S'$  une fonction entre deux surfaces régulières.

Supposons que  $f$  est différentiable au sens de la Définition 25. Ceci veut dire que la fonction  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  déduite de  $f$  est différentiable. Soit  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  un paramétrage local de  $S$ . Par définition (voir Définition 22),  $F \circ \varphi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une fonction différentiable. Comme  $F \circ \varphi(U_0) \subseteq S'$ , nous en déduisons de la Proposition 19 que

$$\varphi'^{-1} \circ F \circ \varphi$$

est différentiable pour n'importe quel paramétrage local  $\varphi' : U'_0 \rightarrow U'$  de  $S'$  dont l'image  $U'$  contient  $F \circ \varphi(U_0)$ . Comme  $U$  est arbitraire, les conditions de la Définition 26 sont satisfaites.

Supposons que  $f$  est différentiable au sens de la Définition 26. Soit  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  un paramétrage local de  $S$ ; nous voulons montrer que  $F \circ \varphi$  est différentiable. Prenons  $p_0 \in U_0$  quelconque et fixons un paramétrage local  $\varphi' : U'_0 \rightarrow U'$  de  $S'$  dans les conditions de la Définition 26 : (a)  $f(\varphi(p_0)) \in U'$ , (b)  $f(U) \subseteq U'$  et (c)  $\varphi'^{-1} \circ f \circ \varphi : U_0 \rightarrow U'_0$  est différentiable. Comme  $\varphi' : U'_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est différentiable,

$$F \circ \varphi = \varphi' \circ \underbrace{\varphi'^{-1} \circ f \circ \varphi}_{\text{différentiable}}$$

l'est également. □

*Exemple 28.* Soit  $S$  une surface régulière et soit  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une application différentiable. Alors la restriction de  $h$  à  $S$  est une application différentiable de  $S$  en  $\mathbb{R}^3$ , car, pour n'importe quel paramétrage  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  de  $S$ , la fonction  $h \circ \varphi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est différentiable. Si, en plus, il existe une surface régulière  $S' \subseteq \mathbb{R}^3$  telle que  $h(S) \subseteq S'$ , il suit directement de la Définition 25 que  $h : S \rightarrow S'$  est différentiable. ■

**Définition 29.** (a) Une fonction différentiable  $f : S \rightarrow S'$  est un **difféomorphisme** s'il existe une fonction différentiable  $g : S' \rightarrow S$  telle que  $g \circ f(p) = p$  et  $f \circ g(p') = p'$  pour chaque  $p \in S$  et chaque  $p' \in S'$ .

(b) Une fonction  $f : S \rightarrow S'$  est un **difféomorphisme local** si, pour chaque point  $p \in S$ , il existe des voisinages  $U$  de  $p$  et  $U'$  de  $p'$  tels que  $f|_U : U \rightarrow U'$  est un difféomorphisme entre les surfaces  $U$  et  $U'$ .

Les difféomorphismes forment une des « équivalences » de la Géométrie différentielle. Il existe d'autres, plus fines, que nous étudierons plus tard (les isométries, voir Définition 59). Les difféomorphismes permettent d'affirmer que les propriétés liées au Calcul différentiel sont transportées sans aucune perte d'information d'une surface à l'autre. Néanmoins, les propriétés

métriques (comme la longueur des courbes, les aires etc) d'une surface, ne sont pas préservées par cette classe de fonctions.

*Exemple 30.* Un ellipsoïde  $E(p, q, r)$  (voir l'Exemple 11) est toujours difféomorphe à la sphère : un difféomorphisme étant la restriction (voir l'Exemple 28) à  $S$  de l'application  $h(x, y, z) = (px, qy, rz)$ . Cependant, le lecteur est invité à montrer que la longueur de l'équateur  $\theta \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$  n'est pas préservé par  $h$  en général.

De façon analogue, chaque hyperboloïde d'une feuille (voir l'Exemple 12) est difféomorphe à  $H(1, 1, 1)$ . (Il est clair qu'un hyperboloïde n'est jamais difféomorphe à un ellipsoïde.)

■

### 3.3 L'espace tangent

**Définition 31.** Soit  $S$  une surface régulière et  $p \in S$ . Un **vecteur tangent** à  $S$  en  $p$  est un vecteur de la forme  $\alpha'(m) \in \mathbb{R}^3$ , où  $\alpha : (a, A) \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une courbe différentiable dont l'image est contenu en  $S$  et qui passe par  $p$  en  $t = m$ . Le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  constitué par les vecteurs tangents est appelé **l'espace tangent** à  $S$  en  $p$  et est noté  $T_p S$ .

*Mise en garde :* La notion intuitive et naturelle d'espace tangent n'est pas celle de la Définition 31 (techniquement plus commode). L'espace tangent qui touche le point  $p$  est la translation  $p + T_p S$ .

Le lemme suivant montre que  $T_p S$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  et nous permet de lui associer une base naturelle.

**Lemme 32.** Soit  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  un paramétrage de  $S$  et soit  $p = \varphi(p_0)$ . Alors

$$T_p S = D\varphi(p_0) \cdot \mathbb{R}^2.$$

En particulier,  $T_p S$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  et  $\{\partial_u \varphi(p_0), \partial_v \varphi(p_0)\}$  est une base.

*Démonstration.* Prouvons que  $T_p S \subseteq D\varphi(p_0) \cdot \mathbb{R}^2$ . Soit  $\alpha : (a, A) \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe différentiable dont l'image est dans  $S$  et qui passe par  $p$  en  $t = m$ . Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que  $\text{Im}(\alpha) \subseteq \varphi(U_0)$ . D'après la Proposition 19, la fonction  $\alpha_0 = \varphi^{-1} \circ \alpha : (a, A) \rightarrow \mathbb{R}^2$  est différentiable. Par la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned} \alpha'(m) &= (\varphi \circ \alpha_0)'(m) \\ &= D\varphi(\alpha_0(m)) \cdot \alpha_0'(m) \in D\varphi(p_0) \cdot \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Prouvons que  $T_p S \supseteq D\varphi(p_0) \cdot \mathbb{R}^2$ . Soit  $v \in \mathbb{R}^2$  quelconque et soit  $\alpha_0(t) := t \cdot v + p_0$ . Si  $|t|$  est suffisamment petit, alors  $\alpha_0(t) \in U_0$  et  $\alpha := \varphi \circ \alpha_0$  est une courbe différentiable qui passe par  $p$  en  $t = 0$ . Comme

$$\begin{aligned} D\varphi(p_0) \cdot v &= D\varphi(p_0) \cdot \alpha_0'(0) \\ &= (\varphi \circ \alpha_0)'(0) \\ &= \alpha'(0), \end{aligned}$$

il suit que  $D\varphi(p_0) \cdot v$  est un vecteur tangent. □

Nous essayons maintenant de décrire les espaces tangents dans quelques exemples.

*Exemple 33.* Soit  $C \subseteq \mathbf{xz}$  une courbe régulière et  $\alpha = (\rho, 0, \zeta) : I_0 \rightarrow C$  un paramétrage local de  $C$ . Soit  $p = (\cos(\theta_0) \cdot \rho(u_0), \sin(\theta_0) \cdot \rho(u_0), \zeta(u_0))$  un point de  $\text{Rot}(C)$ . Comme

$$\varphi(u, \theta) = (\cos(\theta) \cdot \rho(u), \sin(\theta) \cdot \rho(u), \zeta(u))$$

est un paramétrage local de  $\text{Rot}(C)$  ( $\theta$  doit appartenir à un intervalle ouvert précisé, mais ici les calculs sont locaux, voir §2.4), l'espace tangent est engendré par les vecteurs

$$\begin{aligned} \partial_u \varphi(u_0, \theta_0) &= (\rho'(u_0) \cdot \cos(\theta_0), \rho'(u_0) \cdot \sin(\theta_0), \zeta'(u_0)) \\ \partial_\theta \varphi(u_0, \theta_0) &= (-\rho(u_0) \cdot \sin(\theta_0), \rho(u_0) \cdot \cos(\theta_0), 0). \end{aligned}$$

Il est clair que ces vecteurs sont les vecteurs tangents aux courbes différentiables

$$\begin{aligned} u &\mapsto (\rho(u) \cdot \cos(\theta_0), \rho(u) \cdot \sin(\theta_0), \zeta(u)) \\ \theta &\mapsto (\rho(u_0) \cdot \cos(\theta), \rho(u_0) \cdot \sin(\theta), \zeta(u_0)). \end{aligned}$$

■

*Exemple 34* (L'espace tangent à une surface de niveau). Soit  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable et  $c \in \mathbb{R}$  une valeur régulière, de sorte que  $S = F^{-1}(c)$  est une surface régulière. Si  $\alpha : (a, A) \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une courbe différentiable dont l'image est contenue dans  $S$ , nous avons

$$\langle \alpha'(t), \nabla F(\alpha(t)) \rangle = 0;$$

il suit que, pour chaque  $p \in S$ ,  $T_p S$  est contenu dans le plan orthogonal au vecteur  $\nabla F(p)$ . Comme  $\dim T_p S = 2$ , il suit que  $T_p S$  coïncide avec  $(\nabla F(p))^\perp$ . En particulier, l'espace tangent à  $p \in S$  est le complément orthogonal du vecteur  $p$ .

■

### 3.4 La dérivée d'une application différentiable entre surfaces

Soit  $f : S \rightarrow S'$  une fonction différentiable entre surfaces régulières (Définition 26); fixons  $p \in S$  et  $v \in T_p S$ . Prenons une courbe différentiable  $\alpha : (a, A) \rightarrow S$  (i.e.,  $\alpha : (a, A) \rightarrow \mathbb{R}^3$  est différentiable et son image est contenue en  $S$ ) qui, en  $t = m$ , passe par  $p$  avec  $\alpha'(m) = v$ . Prenons  $I = (m - \varepsilon, m + \varepsilon) \subseteq (a, A)$  tel que  $\alpha(I)$  est contenu dans l'image d'un paramétrage local  $\varphi : U_0 \rightarrow U$ . D'après la Proposition 19,  $\varphi^{-1} \circ \alpha : I \rightarrow U_0$  est différentiable. Étant donné que  $f \circ \varphi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est aussi différentiable (Définitions 22 et 25), nous en concluons que

$$f \circ \alpha = (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

est différentiable et son image est contenue dans  $S'$ . Nous pouvons ainsi considérer le vecteur tangent

$$(f \circ \alpha)'(m) \in T_{f(p)}S'.$$

Le lemme suivant montre que l'association  $\alpha'(m) \mapsto (f \circ \alpha)'(m)$  a une nature intrinsèque.

**Lemme 35.** *Soient*

$$\varphi : U_0 \rightarrow U, \text{ et } \varphi' : U'_0 \rightarrow U'$$

*des paramétrages tels que  $f(U) \subseteq U'$ . Si  $\varphi^{-1}(p) =: p_0$ , soit  $v_0 \in \mathbb{R}^2$  tel que  $v = D\varphi(p_0) \cdot v_0$  (nous appliquons le Lemme 32); posons  $F = \varphi'^{-1} \circ f \circ \varphi$ . Alors*

$$(f \circ \alpha)'(m) = D\varphi'(F(p_0)) \cdot DF(p_0) \cdot v_0. \quad (36)$$

*En particulier, si  $\beta : (b, B) \rightarrow S$  est une autre courbe différentiable qui, en  $t = n$ , passe par  $p$  avec vélocité  $v$ , alors  $(f \circ \alpha)'(m) = (f \circ \beta)'(n)$ .*

*Démonstration.* Rappelons que  $\alpha_0 := \varphi^{-1} \circ \alpha : (a, A) \rightarrow U_0$  est différentiable (Proposition 19) et que  $\alpha'_0(m) = v_0$  (car  $D\varphi(p_0) \cdot \alpha'_0(m) = v$  et  $D\varphi(p_0)$  est injective). Nous avons

$$\begin{aligned} f \circ \alpha &= \varphi' \circ \varphi'^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \alpha \\ &= \varphi' \circ F \circ \alpha_0. \end{aligned}$$

Le lemme suit immédiatement de la règle de la chaîne. □

**Définition 37.** Le vecteur tangent  $(f \circ \alpha)'(m)$ , qui est indépendant de la courbe  $\alpha$  choisie (d'après le lemme), sera noté  $Df(p) \cdot v$ . L'application

$$Df(p) : T_pS \rightarrow T_{p'}S'$$

est appelée la dérivée de  $f$  en  $p$ .

La formule (36) pour la dérivée de  $f$  montre que  $Df(p)$  est une **application linéaire**. Une autre conséquence de la preuve du lemme est la suivante. Choisissons des paramétrages locaux

$$\varphi : U_0 \rightarrow U, \text{ et } \varphi' : U'_0 \rightarrow U'$$

tels que  $f(U) \subseteq U'$  et notons  $\varphi^{-1}(p)$  par  $p_0$  et  $\varphi'^{-1}(f(p))$  par  $p'_0$ . Alors,

**Corollaire 38.** *La matrice de  $Df(p)$  par rapport aux bases évidentes*

$$\{\partial_u \varphi(p_0), \partial_v \varphi(p_0)\}, \text{ et } \{\partial_u \varphi'(p'_0), \partial_v \varphi'(p'_0)\}$$

*est la Jacobienne de  $F = \varphi'^{-1} \circ f \circ \varphi$  en  $p_0$ .*

En fait, telle remarque nous permet de donner une autre définition de la dérivée  $Df(p) : T_pS \rightarrow T_{f(p)}S'$ , comme le lecteur peut établir sans difficulté :

**Exercice 39.** Soient  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  et  $\psi : V_0 \rightarrow V$  des paramétrages locaux des voisinages  $U$  et  $V$  de  $p$ . Soient  $\varphi' : U'_0 \rightarrow U'$  et  $\psi' : V'_0 \rightarrow V'$  des paramétrages des voisinages  $U'$  et  $V'$  de  $p' = f(p)$  tels que  $f(U) \subseteq U'$  et  $f(V) \subseteq V'$ . Notons par  $F = (F_1, F_2)$ , respectivement  $G = (G_1, G_2)$ , la composition  $\varphi'^{-1} \circ f \circ \varphi$ , respectivement  $\psi'^{-1} \circ f \circ \psi$ . Montrer, par un calcul *explicite*, que les applications linéaires

$$\begin{aligned}\partial_u \varphi(\varphi^{-1}(p)) &\mapsto \frac{\partial F_1}{\partial u}(\varphi^{-1}(p)) \cdot \partial_u \varphi'(\varphi'^{-1}(p')) + \frac{\partial F_2}{\partial u}(\varphi^{-1}(p)) \cdot \partial_v \varphi'(\varphi'^{-1}(p')) \\ \partial_v \varphi(\varphi^{-1}(p)) &\mapsto \frac{\partial F_1}{\partial v}(\varphi^{-1}(p)) \cdot \partial_u \varphi'(\varphi'^{-1}(p')) + \frac{\partial F_2}{\partial v}(\varphi^{-1}(p)) \cdot \partial_v \varphi'(\varphi'^{-1}(p'))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\partial_u \psi(\psi^{-1}(p)) &\mapsto \frac{\partial G_1}{\partial u}(\psi^{-1}(p)) \cdot \partial_u \psi'(\psi'^{-1}(p')) + \frac{\partial G_2}{\partial u}(\psi^{-1}(p)) \cdot \partial_v \psi'(\psi'^{-1}(p')) \\ \partial_v \psi(\psi^{-1}(p)) &\mapsto \frac{\partial G_1}{\partial v}(\psi^{-1}(p)) \cdot \partial_u \psi'(\psi'^{-1}(p')) + \frac{\partial G_2}{\partial v}(\psi^{-1}(p)) \cdot \partial_v \psi'(\psi'^{-1}(p'))\end{aligned}$$

coïncident.

La preuve du résultat suivant est une application immédiate du Théorème d'inversion locale pour les ouverts des espaces euclidiens.

**Théorème 40** (d'inversion locale). *Soit  $f : S \rightarrow S'$  une application différentiable dont la dérivée  $Df(p) : T_p S \rightarrow T_{f(p)} S'$  est un isomorphisme. Alors, il existe un voisinage  $U$  de  $p$  en  $S$  et un voisinage  $U'$  de  $f(p)$  en  $S'$  tels que  $f|_U : U \rightarrow U'$  est un difféomorphisme (voir Définition 29).  $\square$*

### 3.5 Champs de vecteurs

Ici,  $S$  note une surface régulière.

**Définition 41.** Soit  $U \subseteq S$  ouvert. Une fonction  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  est appelée un champ de vecteurs. Le champ est dit tangent si, pour chaque  $p \in U$ ,  $X(p) \in T_p S$ . Dans le cas où  $X$  est continue (respectivement différentiable) nous dirons que le champ est continu (respectivement différentiable).

Soit  $\varphi : U_0 \rightarrow U \subseteq S$  un paramétrage local. Il existe des champs de vecteurs tangents différentiables évidents sur  $U$  :

$$\varphi_u(p) = \partial_u \varphi(\varphi^{-1}(p)), \quad \varphi_v(p) = \partial_v \varphi(\varphi^{-1}(p)). \quad (42)$$

**Exercice 43.** Assurez-vous d'avoir bien compris pourquoi les champs  $\varphi_u$  et  $\varphi_v$  sont différentiables.

Il y a aussi, un troisième champ de vecteurs, cette fois *normal* :

$$\mathbf{N}_\varphi(p) = \frac{\varphi_u(p) \times \varphi_v(p)}{\|\varphi_u(p) \times \varphi_v(p)\|}. \quad (44)$$

**Lemme 45.** *Le champ  $\mathbf{N}_\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  est différentiable.*



*Démonstration.* Si  $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$ , alors

$$\varphi_u = (\partial_u \varphi^1, \partial_u \varphi^2, \partial_u \varphi^3)(\varphi^{-1}(p)) \text{ et } \varphi_v = (\partial_v \varphi^1, \partial_v \varphi^2, \partial_v \varphi^3)(\varphi^{-1}(p)).$$

Donc,

$$\varphi_u(p) \times \varphi_v(p) = (\partial_u \varphi^2 \partial_v \varphi^3 - \partial_u \varphi^3 \partial_v \varphi^2, \partial_u \varphi^3 \partial_v \varphi^1 - \partial_u \varphi^1 \partial_v \varphi^3, \partial_u \varphi^1 \partial_v \varphi^2 - \partial_u \varphi^2 \partial_v \varphi^1)(\varphi^{-1}(p)).$$

Il en résulte que  $\varphi_u \times \varphi_v$  est une fonction différentiable sur  $U$ , et, en plus, est toujours non-nulle (par définition d'un paramétrage); il suit que

$$p \mapsto \|\varphi_u(p) \times \varphi_v(p)\|^{-1}$$

est différentiable sur  $U$ . □

En fait, les champs  $\varphi_u, \varphi_v$  et  $\mathbf{N}_\varphi$  « engendrent » tous les champs de vecteurs différentiables sur un petit ouvert de  $S$ .

**Proposition 46.** Soit  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  un paramétrage local de  $S$  et  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  un champ de vecteurs. Il existe des fonctions différentiables  $X_u, X_v$  et  $X_N$  telles que, pour chaque  $p \in U$ , nous avons

$$X(p) = X_u \cdot \varphi_u(p) + X_v(p) \cdot \varphi_v(p) + X_N(p) \cdot \mathbf{N}_\varphi(p).$$

*Démonstration.* Soient  $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$  et  $e_3 = (0, 0, 1)$  les champs de vecteurs constants sur  $U$ . Comme  $X$  est par définition différentiable, nous savons que  $X = X_1 \cdot e_1 + X_2 \cdot e_2 + X_3 \cdot e_3$ , où  $X_i$  sont différentiables sur  $U$ , et par conséquent, pour montrer l'existence des fonctions envisagées dans l'énoncé, il est suffisant de le faire dans le cas  $X = e_i$ . Écrivons  $\varphi_u = (\varphi_u^1, \varphi_u^2, \varphi_u^3)$ ,  $\varphi_v = (\varphi_v^1, \varphi_v^2, \varphi_v^3)$  et  $\mathbf{N}_\varphi = (N^1, N^2, N^3)$ . Alors la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \varphi_u^1 & \varphi_v^1 & N^1 \\ \varphi_u^2 & \varphi_v^2 & N^2 \\ \varphi_u^3 & \varphi_v^3 & N^3 \end{pmatrix}$$

est inversible et chaque entrée est une fonction différentiable sur  $U$ . Par définition

$$M \cdot \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \\ X_N \end{pmatrix} = e_i.$$

Comme les entrées de  $M^{-1}$  sont aussi des fonctions différentiables, la preuve est achevée. □

Dans un moment d'inattention, le lecteur peut avoir l'impression que la Proposition 46 nous aide à comprendre *tous* les champs de vecteurs sur une surface. Une telle idée est loin d'être vraie : la proposition est d'une nature strictement locale. En fait, la preuve du résultat suivant n'est pas triviale.

**Théorème 47.** Soit  $X$  un champ tangent continu sur  $\mathbf{S}$ . Alors il existe au moins un  $p \in \mathbf{S}$  tel que  $X(p) = 0$ . □

Dans une direction plus positive, nous avons l'exemple suivant.

*Exemple 48.* Soit  $\mathbf{T}$  le tore construit dans l'Exemple 17. Soit  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{T}$  définie par

$$(u, \theta) \mapsto ((2 + \cos(u)) \cos(\theta), (2 + \cos(u)) \sin(\theta), \sin(u)).$$

Nous savons déjà que les restrictions de  $\varphi$  à des carrés convenables sont des paramétrages. Il n'est pas difficile de montrer que pour chaque  $p \in \mathbf{T}$  et chaque couple antécédents  $p_0, p_1$ , nous avons

$$\partial_u \varphi(p_0) = \partial_u \varphi(p_1) \quad \text{et} \quad \partial_v \varphi(p_0) = \partial_v \varphi(p_1).$$

Ceci montre que

$$X : p \mapsto \partial_u \varphi(\text{antécédent arbitraire de } p)$$

et

$$Y : p \mapsto \partial_v \varphi(\text{antécédent arbitraire de } p)$$

sont des fonctions bien définies. En plus,  $X$  et  $Y$  sont des champs tangents différentiables tels que  $\{X(p), Y(p)\}$  est une base de  $T_p \mathbf{T}$  pour chaque  $p \in \mathbf{T}$ . En particulier, ni  $X$ , ni  $Y$  s'annule. (Les détails sont laissés comme exercice.) ■

### 3.6 Les champs normaux et l'orientation

Soit  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  une surface régulière.

**Définition 49.** Une **orientation** sur  $S$  est la donnée d'un champ de vecteurs différentiable et normal  $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  tel que, en plus,  $\|\mathbf{N}\| = 1$ . Si un tel champ de vecteurs existe, la surface  $S$  est dite **orientable**. Une fois choisie une orientation sur  $S$ , nous dirons que  $S$  est **orientée**.

*Exemple 50.* (a) Le champ normal  $\mathbf{N} : p \in \mathbf{S} \mapsto p \in \mathbb{R}^3$  (voir exemple 34) sur la sphère  $\mathbf{S}$  est une orientation.

(b) Les surfaces de niveau  $S = f^{-1}(a)$  (voir §2.3) sont toujours orientées par le champ

$$\mathbf{N}(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}.$$

Un résultat très intéressant, mais plus difficile, est que chaque surface orientée de  $\mathbb{R}^3$  est en fait une surface de niveau. Voir 2.7, [1].

(c) Les graphes  $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = h(x, y)\}$  sont toujours orientés, car ils peuvent être couverts par un seul paramétrage.

■

Le lemme suivant montre que la différentiabilité d'un champ continu et normal est automatique.

**Lemme 51.** Soit  $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  un champ de vecteurs continu, normal, et de norme constante égale à 1. Alors  $\mathbf{N}$  est différentiable.

*Démonstration.* Une fonction  $h : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  est différentiable si, et seulement si, pour chaque paramétrage  $\varphi : U_0 \rightarrow U$ , la fonction  $h \circ \varphi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'est. Soit  $\varphi$  un tel paramétrage, et supposons, en plus, que  $U_0$  est connexe. Comme  $\dim_{\mathbb{R}} T_p S = 2$ , il suit que, pour chaque  $(u, v) \in U_0$ , il existe un  $\varepsilon(u, v) \in \{-1, 1\}$  tel que

$$\mathbf{N}(\varphi(u, v)) = \varepsilon(u, v) \cdot \mathbf{N}_{\varphi} \circ \varphi(u, v).$$

La fonction  $\varepsilon$  est continue, car finalement  $\varepsilon = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N}_{\varphi} \rangle$ . Il suit que  $\varepsilon : U_0 \rightarrow \{-1, 1\}$  est une fonction constante, et la différentiabilité de  $\mathbf{N}$  est une conséquence de la différentiabilité de  $\mathbf{N}_{\varphi}$ .  $\square$

Il est clair que chaque surface régulière est **localement orientable**. Nous observons que si  $\mathbf{N}$  est une orientation sur  $S$ , alors  $-\mathbf{N}$  est une autre orientation, appelée **l'orientation opposée**.

La notion d'orientation possède un intérêt intuitif : sur une surface orientée, nous pouvons distinguer « l'intérieur » et « l'extérieur ». Elle a aussi une importance technique, car l'orientation joue un rôle dans l'intégration.

**Définition 52.** Un paramétrage local  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  est compatible avec une orientation  $\mathbf{N}$  si  $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{\varphi}$  (voir éq. (44)) sur l'ouvert  $U$ .

Soient  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  et  $\psi : V_0 \rightarrow V$  des paramétrages tels que  $U \cap V \neq \emptyset$ . Écrivons

$$\psi^{-1} \circ \varphi = (f, g), \quad \text{c'est à dire} \quad \varphi(u, v) = \psi(f(u, v), g(u, v)).$$

La règle de la chaîne nous donne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial \psi}{\partial u}(f(u, v), g(u, v)) \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial v}(f(u, v), g(u, v)) \frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial \psi}{\partial u}(f(u, v), g(u, v)) \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial \psi}{\partial v}(f(u, v), g(u, v)) \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$$

sur l'ouvert  $\varphi^{-1}(U \cap V) \subseteq U_0$ . Il suit que

$$\begin{aligned} (\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi)(u, v) &= \left( \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial g}{\partial u} \right)(u, v) \cdot (\partial_u \psi \times \partial_v \psi)(f(u, v), g(u, v)) \\ &= \det(\text{Jac}(\psi^{-1} \circ \varphi)(u, v)) \cdot (\partial_u \psi \times \partial_v \psi)(f(u, v), g(u, v)). \end{aligned} \quad (53)$$

Par conséquent

$$\mathbf{N}_{\varphi}(p) = \frac{\det \text{Jac}(\psi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p))}{\|\det \text{Jac}(\psi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p))\|} \cdot \mathbf{N}_{\psi}(p), \quad \forall p \in U \cap V. \quad (54)$$

Cette équation achève la preuve du lemme suivant :

**Lemme 55.** Une surface régulière  $S$  est orientable si, et seulement si, il existe des paramétrages locaux  $\varphi_i : U_0^{(i)} \rightarrow U^{(i)}$  tels que

1.  $\cup_i U^{(i)} = S$  et
2.  $\det \text{Jac}(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i) > 0$ .

□

### 3.7 Complément : les structures de surface de Riemann

Pour mieux comprendre l'importance théorique du Corollaire 20

« le changement de paramétrage  $\psi^{-1} \circ \varphi$  est de classe  $C^\infty$  »,

et aussi jeter un coup d'oeil sur une des plus belles théories mathématiques, nous allons essayer de définir une fonction **holomorphe** sur une surface régulière  $S$ . Soit alors  $h : S \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction. Essayons la suivante : « La fonction  $h$  est holomorphe si, pour chaque point  $p \in S$ , il existe un paramétrage local d'un voisinage  $U_p$  de  $p$ , disons  $\varphi_p : U_{0,p} \rightarrow U_p$ , tel que la fonction  $h \circ \varphi_p^{-1} : U_{0,p} \rightarrow \mathbb{C}$  soit holomorphe<sup>2</sup>. » La définition ici n'est pas indépendante du paramétrage  $\varphi_p$  choisi — car la formule (23)

$$f \circ \varphi(q) = f \circ \underbrace{\psi \circ (\psi^{-1} \circ \varphi)}_{\text{difféomorphisme}}(q)$$

ne peut pas nous aider comme avant — ce qui est assez problématique. À ce point nous voyons l'importance du Corollaire 20, parce que la dépendance du paramétrage choisi sera surmonté par l'hypothèse «  $\psi^{-1} \circ \varphi$  est une fonction holomorphe » (il suffit d'appliquer l'équation (23)).

Une surface régulière  $S$  telle que, dans la conclusion du Corollaire 20, nous pouvons toujours prendre **holomorphe** à la place de différentiable est un cas particulier d'une **surface de Riemann**. Plus précisément, une **structure de surface de Riemann** sur une surface régulière  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  est un choix d'une famille de paramétrages locaux

$$\varphi_j : U_0^{(j)} \rightarrow U^{(j)}$$

tels que :

- (i)  $\cup_j U^{(j)} = S$ , et
- (ii)  $\varphi_k^{-1} \circ \varphi_j$  est une fonction holomorphe sur l'ouvert  $\varphi_j^{-1}(U^{(j)} \cap U^{(k)})$  pour chaque couple  $j, k$ .

Ici il est important de voir que la structure de surface de Riemann est quelque chose *supplémentaire* à la structure de surface régulière. Un exemple simple, mais non trivial, est le suivant. Soit

---

2. Rappelons que une fonction différentiable  $(f, g) : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  est holomorphe si et seulement si les équations de Cauchy–Riemann

$$\partial_u f = \partial_v g, \quad \partial_v f = -\partial_u g.$$

sont vérifiées.

$\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la conjugaison complexe  $(u, v) \mapsto (u, -v)$ ; si  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  notent les projections stéréographiques, il suit que  $\sigma_+ \circ \rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{S}$  et  $\sigma_- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{S}$  définissent une structure de surface de Riemann sur  $\mathbf{S}$  (exercice). Par contre les paramétrages standards n'ont pas cette particularité, car

$$\psi_+^{-1} \circ \varphi_+ : (u, v) \mapsto \left( u, \sqrt{1 - u^2 - v^2} \right)$$

n'est pas une fonction holomorphe (voir l'Exemple 21).

## 4 Longueurs et aires : la métrique

Dans cette partie du texte, nous commençons vraiment l'étude de la Géométrie différentielle, au moins, si nous prenons par définition de Géométrie celle donnée par une partie de son étymologie (en grec « gé » signifie « terre » et « metrie » est associée à « mesurer »).

Dans le texte qui suit,  $S$  notera une surface régulière  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ .

### 4.1 La première forme fondamentale

**Définition 56.** La première forme fondamentale au point  $p \in S$  est la restriction à  $T_p S$  du produit interne naturel de  $\mathbb{R}^3$  et est notée

$$I_p = \langle \cdot, \cdot \rangle : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nous allons maintenant utiliser les paramétrages pour manipuler la première forme fondamentale. Soit  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  un paramétrage local de  $S$ . À un tel paramétrage, nous pouvons associer des champs de vecteurs  $\varphi_u$  et  $\varphi_v$  sur  $U$  (voir eqs. (42)). Définissons les fonctions suivantes sur  $U$  :

$$E_\varphi = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle, \quad G_\varphi = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle, \quad F_\varphi = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle.$$

S'il n'y a aucun risque de confusion, nous écrivons simplement  $E, F, G$  au lieu de  $E_\varphi, F_\varphi, G_\varphi$ . Nous allons également commettre l'abus de confondre  $E, F, G$  avec  $E \circ \varphi^{-1}, F \circ \varphi^{-1}, G \circ \varphi^{-1}$  (qui sont des fonctions sur  $U_0$ ). D'après la Définition 22, il est clair que  $E, F, G$  sont des *fonctions différentiables*. Il est aussi clair que  $E$  et  $G$  sont fonctions *strictement positives*.

**Définition 57.** Les fonctions  $E, F$  et  $G$  sont appelées **les coefficients de la première forme fondamentale**.

La matrice symétrique associée à la première forme fondamentale par rapport à la base  $\{\varphi_u(p), \varphi_v(p)\}$  de  $T_p S$  est

$$\begin{pmatrix} E(p) & F(p) \\ F(p) & G(p) \end{pmatrix}.$$

C'est à dire,

$$\begin{aligned} \|\dot{u} \cdot \varphi_u(p) + \dot{v} \cdot \varphi_v(p)\|^2 &= I_p(\dot{u} \cdot \varphi_u(p) + \dot{v} \cdot \varphi_v(p)) \\ &= \begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E(p) & F(p) \\ F(p) & G(p) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}. \\ &= E(p) \cdot \dot{u}^2 + 2F(p) \cdot \dot{u}\dot{v} + G(p) \cdot \dot{v}^2. \end{aligned} \tag{58}$$

### 4.2 Les isométries

Comme nous sommes intéressés par l'étude des longueurs, il est vital d'isoler les applications entre des surfaces qui préservent la première forme fondamentale.

**Définition 59.** Soit  $S'$  une autre surface régulière. Un difféomorphisme  $h : S \rightarrow S'$  est dit une isométrie, si pour chaque point  $p \in S$  et chaque couple  $\xi, \eta \in T_p S$ , l'égalité

$$\langle \xi, \eta \rangle_p = \langle Dh(p) \cdot \xi, Dh(p) \cdot \eta \rangle_{h(p)}$$

est vérifiée. Dans le cas où  $h$  est simplement un difféomorphisme local et  $Dh(p)$  satisfait l'équation ci-dessus pour chaque  $p$  et chaque  $\xi, \eta$ , nous dirons que  $h$  est une **isométrie locale**.

Comme  $\|\xi + \eta\|^2 - \|\xi\|^2 - \|\eta\|^2 = 2\langle \xi, \eta \rangle$ , il suit qu'un difféomorphisme  $h : S \rightarrow S'$  est une isométrie si et seulement si

$$\|Dh(p) \cdot \xi\| = \|\xi\|$$

pour chaque  $p \in S$  et chaque  $\xi \in T_p S$ . Il faut aussi remarquer que les isométries locales *préservent la longueur des courbes* : si  $\alpha : (a, A) \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une courbe différentiable contenue dans  $S$ ,  $h : S \rightarrow S'$  est une isométrie locale, et  $[b, B] \subset (a, A)$  alors

$$\mathbf{L}_b^B(\alpha) = \mathbf{L}_b^B(h \circ \alpha).$$

*Exemple 60.* Soit  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, x > 0\}$  le demi-cylindre et  $B = (-\pi/2, +\pi/2) \times \mathbb{R} \times \{0\}$ . Considérons le paramétrage de  $S$

$$\varphi : (-\pi/2, +\pi/2) \times \mathbb{R} \rightarrow S, \quad (u, v) \mapsto (\cos(u), \sin(u), v).$$

(L'inverse de  $\varphi$  est  $(x, y, z) \mapsto (\arcsin(y), z)$ .) Soit  $\psi(u, v) = (u, v, 0)$  le paramétrage bête de  $B$ . Il suit que

$$h : B \rightarrow S, \quad (x, y, 0) \mapsto (\cos(x), \sin(x), y)$$

est un difféomorphisme et, que pour chaque point  $p \in B$ , nous avons

$$Dh(p) \cdot \psi_u(p) = \varphi_u(h(p)), \quad \text{et} \quad Dh(p) \cdot \psi_v(p) = \varphi_v(h(p)).$$

Comme

$$E_\psi = E_\varphi = 1, \quad F_\psi = F_\varphi = 0, \quad G_\psi = G_\varphi = 1,$$

une application directe de la formule (58) montre que  $h$  est une isométrie. ■

L'exemple précédent possède une généralisation facile ; la preuve est un exercice laissé au lecteur.

**Lemme 61.** Soient  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  et  $\varphi' : U_0 \rightarrow U'$  des paramétrages locaux de  $S$  et  $S'$ . Alors  $h := \varphi' \circ \varphi^{-1} : U \rightarrow U'$  est une isométrie si et seulement si  $E_\varphi = E_{\varphi'}$ ,  $F_\varphi = F_{\varphi'}$  et  $G_\varphi = G_{\varphi'}$ .

### 4.3 Les aires

Soit  $\Omega \subset U$  un sous-ensemble. L'aire de  $\Omega$  par rapport à  $\varphi$  est définie par

$$\text{Aire}_\varphi(\Omega) = \int_{\varphi^{-1}(\Omega)} \|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\| \, dudv,$$

si l'intégrale existe. Comme pour chaque couple de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  nous avons la formule

$$\|\xi \times \eta\|^2 + \langle \xi, \eta \rangle^2 = \|\xi\|^2 \cdot \|\eta\|^2, \quad (62)$$

il suit que

$$\text{Aire}_\varphi(\Omega) = \int_{\varphi^{-1}(\Omega)} \sqrt{EG - F^2} \, dudv.$$

En fait, pour que la théorie de l'intégration marche proprement, nous devons imposer quelques conditions sur l'ensemble  $\Omega_0 := \varphi^{-1}(\Omega)$ . La meilleure façon d'aborder un tel problème nous amène à une théorie trop importante pour être traitée de façon marginale. Nous allons nous contenter de prendre simplement  $\Omega_0$  compact tel que  $\partial\Omega_0$  est de mesure nulle<sup>3</sup> : cette hypothèse garantit que l'intégrale de Riemann sur  $\Omega_0$  d'une fonction continue existe. Le lemme suivant montre que  $\text{Aire}_\varphi(\Omega)$  est indépendante du paramétrage.

**Lemme 63.** *Soit  $\Omega \subseteq U$  un sous-ensemble compact tel que  $\partial(\varphi^{-1}(\Omega))$  est de mesure nulle. Soit  $\psi : V_0 \rightarrow V$  un autre paramétrage de  $S$  tel que  $\Omega \subseteq V$ . Alors*

$$\text{Aire}_\varphi(\Omega) = \text{Aire}_\psi(\Omega).$$

*Démonstration.* C'est une conséquence facile de la formule de changement de variables pour les intégrales multiples. Rappelons que si  $\sigma : A \rightarrow B$  est un difféomorphisme entre deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$  alors, pour chaque sous-ensemble compact  $K \subseteq A$  dont le bord  $\partial K$  a mesure nulle, et pour chaque fonction continue  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ , le bord  $\partial\sigma(K) = \sigma(\partial K)$  a mesure nulle et

$$\int_{\sigma(K)} g = \int_K g \circ \sigma \cdot \|\det \text{Jac}(\sigma)\|.$$

Soit

$$\sigma = \psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(U \cap V) \rightarrow \psi^{-1}(U \cap V);$$

d'après le Corollaire 20,  $\sigma$  est un difféomorphisme et donc

$$\text{Aire}_\psi(\Omega) = \int_{\psi^{-1}(\Omega)} \|\partial_u \psi \times \partial_v \psi\| = \int_{\varphi^{-1}(\Omega)} \|\partial_u \psi \times \partial_v \psi\| \circ \sigma \cdot \|\det \text{Jac}(\sigma)\|. \quad (64)$$

D'après l'équation (53), le côté droit de l'équation (64) est

$$\int_{\varphi^{-1}(\Omega)} \|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\| = \text{Aire}_\varphi(\Omega).$$

□

---

3. Un sous-ensemble  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  est de mesure nulle si, étant donné un  $\varepsilon > 0$ , il existe une famille dénombrable de cubes fermés  $C_\alpha = [a_{1,\alpha}, b_{1,\alpha}] \times \cdots \times [a_{n,\alpha}, b_{n,\alpha}]$  tels que  $\cup C_\alpha \supseteq E$  et  $\sum_\alpha \text{vol} C_\alpha < \varepsilon$ .



Pour calculer l'aire d'un compact quelconque, il faut introduire les partitions de l'unité. La théorie prend alors une direction trop technique étant donné nos objectifs, et nous nous arrêtons ici.

#### 4.4 Les angles

**Définition 65.** Soient  $\xi, \eta \in T_p S$ . L'angle  $\angle(\xi, \eta)$  entre  $\xi$  et  $\eta$  est le seul nombre réel dans  $[0, \pi]$  tel que

$$\cos \angle(\xi, \eta) = \frac{\langle \xi, \eta \rangle_p}{\|\xi\|_p \cdot \|\eta\|_p}.$$

Il est clair que si  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  est un paramétrage local, alors le cosinus de l'angle entre les vecteurs  $\dot{u} \cdot \partial_u \varphi(p_0) + \dot{v} \cdot \partial_v \varphi(p_0)$  et  $\ddot{u} \cdot \partial_u \varphi(p_0) + \ddot{v} \cdot \partial_v \varphi(p_0)$  est

$$\frac{E \cdot \dot{u}\dot{u} + F \cdot \dot{u} \cdot \ddot{v} + F \cdot \ddot{u} \cdot \dot{v} + G\ddot{v}\ddot{v}}{(E \cdot \dot{u}^2 + 2F \cdot \dot{u}\dot{v} + G \cdot \dot{v}^2)^{1/2} \cdot (E \cdot \ddot{u}^2 + 2F \cdot \ddot{u}\ddot{v} + G \cdot \ddot{v}^2)^{1/2}}. \quad (66)$$

Si  $h : S \rightarrow S'$  est un difféomorphisme local entre deux surfaces régulières, nous dirons que  $h$  est **conforme** si, pour chaque  $p \in S$ , la dérivée

$$Dh(p) : T_p S \rightarrow T_{h(p)} S'$$

préserve les angles.

**Lemme 67.** Soit  $h : S \rightarrow S'$  un difféomorphisme local. Les deux conditions suivantes équivalent.

(i)  $h$  est conforme ;

(ii) il existe une fonction  $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable telle que

$$\langle Dh(p) \cdot \xi, Dh(p) \cdot \eta \rangle_{h(p)} = \lambda(p)^2 \langle \xi, \eta \rangle_p.$$

*Démonstration.* (i)  $\Rightarrow$  (ii). Nous montrons d'abord l'affirmation suivante : Soit  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un isomorphisme linéaire qui préserve les angles. Alors<sup>4</sup> il existe un  $\lambda \neq 0$  tel que  $\langle Tx, Ty \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle$ . Nous remarquons que  $Te_1$  et  $Te_2$  sont orthogonaux. Prenons  $(c, s) \in \mathbb{R}^2$  de norme 1 avec  $c \neq 0$ . Alors

$$\begin{aligned} c &= \langle (c, s), e_1 \rangle \\ &= \frac{\langle c \cdot Te_1 + s \cdot Te_2, Te_1 \rangle}{\|T(c, s)\| \cdot \|Te_1\|} \\ &= c \cdot \frac{\|Te_1\|}{\|T(c, s)\|}. \end{aligned}$$

Il suit que  $\|Te_1\| = \|T(c, s)\|$ . Le même raisonnement montre que  $\|Te_2\| = \|T(c, s)\|$  pour chaque  $(c, s)$  de norme 1 tel que  $s \neq 0$ . Donc,  $\|Te_2\| = \|Te_1\| =: \lambda$ . Par conséquent

$$\langle T(c, s), T(c', s') \rangle = \lambda^2 \cdot (cc' + ss') = \lambda^2 \cdot \langle (c, s), (c', s') \rangle.$$

4. L'affirmation reste vraie même en dimension supérieure.

De l'affirmation, nous obtenons l'existence d'une fonction  $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour chaque couple  $\xi, \eta \in T_p S$ , l'équation

$$\langle Dh(p) \cdot \xi, Dh(p) \cdot \eta \rangle_{h(p)} = \lambda(p)^2 \langle \xi, \eta \rangle_p.$$

est vérifiée. Le fait que  $\lambda$  soit différentiable est facile et nous laissons comme exercice au lecteur.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). C'est facile, car

$$\begin{aligned} \cos \angle (Dh(p) \cdot \xi, Dh(p) \cdot \eta) &= \frac{\langle Dh(p) \cdot \xi, Dh(p) \cdot \eta \rangle_{h(p)}}{\|Dh(p) \cdot \xi\|_{h(p)} \cdot \|Dh(p) \cdot \eta\|_{h(p)}} \\ &= \frac{\lambda(p)^2 \cdot \langle \xi, \eta \rangle_p}{\lambda(p)^2 \cdot \|\xi\|_p \cdot \|\eta\|_p} \\ &= \cos \angle (\xi, \eta). \end{aligned}$$

□

## 5 L'application normale de Gauss

Dans tout ce paragraphe,  $S$  notera une surface régulière **orientée** (voir §3.6) par un champ normal  $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ . En utilisant la Définition 25 (et la Proposition 27), nous garantissons que

$$\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbf{S}$$

est en fait une application différentiable, que nous appelons **l'application normale de Gauss**. L'étude de la dérivée

$$-DN(p) : T_p S \rightarrow T_{\mathbf{N}(p)} \mathbf{S}$$

est central dans le Géométrie des surfaces.

### 5.1 La deuxième forme fondamentale et la courbure de Gauss : propriétés basiques

**Proposition 68.** (i) Les espaces vectoriels  $T_p S$  et  $T_{\mathbf{N}(p)} \mathbf{S}$  coïncident.

(ii) Pour chaque couple  $\xi, \eta \in T_p S$ , nous avons l'égalité

$$\langle DN(p) \cdot \xi, \eta \rangle = \langle \xi, DN(p) \cdot \eta \rangle. \quad (69)$$

Dit autrement,  $DN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  est symétrique.

(iii) L'espace vectoriel  $T_p S = T_{\mathbf{N}(p)} \mathbf{S}$  possède une base **orthonormale** formée par des vecteurs propres de  $DN(p)$ .

*Démonstration.* (i) Par définition, l'espace  $T_p S$  est le complément orthogonal de  $\mathbf{N}(p)$ . D'après l'exemple 34,  $T_{\mathbf{N}(p)} \mathbf{S}$  est le complément orthogonal de  $\mathbf{N}(p)$ , d'où le résultat.

(ii) Soit  $\varphi : U_0 \rightarrow U \subseteq S$  un paramétrage local compatible avec l'orientation (voir Définition 52). Notons par  $\mathbf{N}_0$  l'application différentiable  $\mathbf{N} \circ \varphi : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Par définition,

$$\langle \partial_u \varphi, \mathbf{N}_0 \rangle = 0 = \langle \partial_v \varphi, \mathbf{N}_0 \rangle \quad \text{sur } U_0; \quad (70)$$

il suit que

$$0 = \partial_v \langle \partial_u \varphi, \mathbf{N}_0 \rangle = \langle \partial_{vu} \varphi, \mathbf{N}_0 \rangle + \langle \partial_u \varphi, \partial_v \mathbf{N}_0 \rangle \quad (71)$$

et que

$$0 = \partial_u \langle \partial_v \varphi, \mathbf{N}_0 \rangle = \langle \partial_{uv} \varphi, \mathbf{N}_0 \rangle + \langle \partial_v \varphi, \partial_u \mathbf{N}_0 \rangle. \quad (72)$$

Un instant de réflexion montre que

$$\begin{aligned} DN(\varphi(p_0)) \cdot \partial_u \varphi(p_0) &= \partial_u \mathbf{N}_0(p_0), \\ DN(\varphi(p_0)) \cdot \partial_v \varphi(p_0) &= \partial_v \mathbf{N}_0(p_0). \end{aligned}$$

Par conséquent, les équations (71) et (72) donnent

$$\begin{aligned}\langle \partial_u \varphi(p_0), DN(\varphi(p_0)) \cdot \partial_v \varphi(p_0) \rangle &= -\langle \partial_{vu} \varphi(p_0), \mathbf{N}(\varphi(p_0)) \rangle \\ &= -\langle \partial_{uv} \varphi, \mathbf{N}(\varphi(p_0)) \rangle \\ &= \langle \partial_v \varphi(p_0), DN(\varphi(p_0)) \cdot \partial_u \varphi(p_0) \rangle,\end{aligned}$$

pour chaque  $p_0 \in U_0$ . L'égalité cherchée en résulte car  $\{\partial_u \varphi(p_0), \partial_v \varphi(p_0)\}$  est une base de  $T_{\varphi(p_0)}S$ .

(iii) C'est de l'Algèbre linéaire : si  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie et

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

est un produit interne non-dégénéré, tout opérateur linéaire  $A : V \rightarrow V$  symétrique (i.e.  $\langle A \cdot \xi, \eta \rangle = \langle \xi, A \cdot \eta \rangle$  pour tout  $\xi, \eta \in V$ ) possède une base orthonormale formé par des vecteurs propres.  $\square$

**Définition 73.** (i) La deuxième forme fondamentale est la forme bilinéaire symétrique

$$\Pi_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par (**Attention au signe !**)

$$\Pi_p(\xi, \eta) = \langle \xi, -DN(p) \cdot \eta \rangle.$$

Comme d'habitude, la forme quadratique associée à  $\Pi_p$ ,  $\xi \mapsto \Pi_p(\xi, \xi)$ , sera notée de la même manière.

(ii) Si  $\varphi : U_0 \rightarrow U \subseteq S$  est un paramétrage local, les coefficients de la deuxième forme fondamentale sont les fonctions différentiables

$$e_\varphi(p) = \Pi_p(\varphi_u(p), \varphi_u(p)), \quad f_\varphi(p) = \Pi_p(\varphi_u(p), \varphi_v(p)), \quad g_\varphi(p) = \Pi_p(\varphi_v(p), \varphi_v(p)).$$

Dit autrement, la matrice de  $\Pi_p$  associée à la base  $\{\varphi_u(p), \varphi_v(p)\}$  est

$$\begin{pmatrix} e_\varphi(p) & f_\varphi(p) \\ f_\varphi(p) & g_\varphi(p) \end{pmatrix}.$$

(Nous abuserons la notation et oublierons, par fois, l'indice "φ".)

La deuxième forme fondamentale n'est pas simplement une forme bilinéaire sur  $T_p S$ , mais elle est définie par une application linéaire symétrique  $-DN(p) : T_p S \rightarrow T_p S$ . Les invariants usuels de l'algèbre linéaire associés à  $-DN(p)$  forment une grande source d'informations géométriques.

**Définition 74** (Les courbures). Soit  $p \in S$ .

(i) Les valeurs propres de l'application linéaire symétrique

$$-DN(p) : T_p S \rightarrow T_p S$$

sont appelés les **courbures principales** de  $S$  en  $p$  et sont notées  $k_{\min}(p) \leq k_{\max}(p)$ . Un vecteur propre de  $-DN(p)$  est appelé une **direction principale**.

(ii) Le déterminant de  $-DN(p) : T_p S \rightarrow T_p S$  est appelé la **courbure (de Gauss)** de  $S$  en  $p$ .

(iii) La moitié de la trace de  $-DN(p) : T_p S \rightarrow T_p S$  est appelé la **courbure moyenne** de  $S$  en  $p$ .

*Exemple 75.* Il est clair que la courbure d'un plan  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  est partout nulle, une fois que  $\mathbf{N}$  est une fonction constante et par conséquent  $-DN \equiv 0$ . Réciproquement, si  $-DN \equiv 0$ , alors  $S$  est forcément un (morceau de) plan, car l'application  $\mathbf{N}$  est constante. Le lecteur peut alors comprendre la raison pour laquelle les invariants ci-dessus s'appellent des « courbures ».

■

*Exemple 76.* Soit

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

le cylindre. Il s'agit de la surface de rotation obtenue en tournant la droite  $D = \{(1, 0, u) : u \in \mathbb{R}\}$  autour de l'axe  $z$ . Par conséquent,

$$\varphi : \mathbb{R} \times (-\pi, +\pi) \rightarrow C, \quad (u, \theta) \mapsto (\cos \theta, \sin \theta, u)$$

est un paramétrage local. Orientons  $C$  par  $\mathbf{N}(x, y, z) = -(x, y, 0)$ ; un calcul direct montre que  $\mathbf{N} \circ \varphi = \partial_u \varphi \times \partial_\theta \varphi$ . Fixons  $p_0 = (u_0, \theta_0) \in \mathbb{R} \times (-\pi, +\pi)$  et  $p = \varphi(p_0)$ . Alors  $-DN_p \cdot \partial_u \varphi(p_0) = 0$  et  $-DN_p \cdot \partial_\theta \varphi(p_0) = \partial_\theta \varphi(p_0)$ . Les directions principales sont alors  $\partial_u \varphi(p_0)$  et  $\partial_\theta \varphi(p_0)$ ; la courbure principale dans la direction de  $\partial_u \varphi(p_0)$ , respectivement  $\partial_\theta \varphi(p_0)$ , vaut 0, respectivement 1.

■

Il est fructueux de répéter **qu'il existe un couple de directions principales orthogonales**, comme nous garantit la Proposition 68–(iii). En plus, si  $v_1, v_2 \in T_p S$  sont des directions principales de norme 1 correspondent aux valeurs propres  $k_{\min}(p)$  et  $k_{\max}(p)$ , ce qui veut dire que  $-DN(p) \cdot v_1 = k_{\min}(p) \cdot v_1$  et  $-DN(p) \cdot v_2 = k_{\max}(p) \cdot v_2$ , alors

$$\Pi_p(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1^2 k_{\min}(p) + a_2^2 k_{\max}(p). \quad (77)$$

De (77) nous en tirons

$$k_{\min}(p) \leq \Pi_p(w) \leq k_{\max}(p), \quad w \in T_p S, \|w\| = 1. \quad (78)$$

C'est à dire :

**Lemme 79.** *Le réel  $k_{\min}(p)$ , respectivement  $k_{\max}(p)$ , est le minimum, respectivement le maximum, de la restriction de  $\Pi_p$  aux vecteurs de  $T_p S$  de norme un.*

## 5.2 La détermination « mécanique » des courbures à partir des deux formes fondamentales

Nous allons dans ce paragraphe déterminer des expressions pour les courbures en termes des coefficients des formes fondamentales. Soit  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  un paramétrage compatible avec l'orientation (voir Définition 52).

L'Algèbre linéaire nous laisse exprimer les courbures (Définition 74) en termes des deux formes fondamentales. Soit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

la matrice de  $-DN(p)$  par rapport à la base  $\{\varphi_u(p), \varphi_v(p)\}$ . D'après la théorie des formes bilinéaires, nous avons l'égalité<sup>5</sup>

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (80)$$

Comme la matrice

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

est inversible — son déterminant est  $EG - F^2 = \|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\|^2$  d'après la formule (62) — nous obtenons

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}(p), \quad (81)$$

$$H(p) = \frac{Ge - 2Ff + Eg}{2(EG - F^2)}(p), \quad (82)$$

et

$$k_{\min}(p) = H(p) - \sqrt{H(p)^2 - K(p)}, \quad k_{\max}(p) = H(p) + \sqrt{H(p)^2 - K(p)}. \quad (83)$$

(Pour vérifier la formule (83), le lecteur peut se rappeler que  $k_{\min}(p)$  et  $k_{\max}(p)$  sont des racines de l'équation  $X^2 - 2H(p)X + K(p)$ .)

---

5. Soient  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $K$ ,  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_r\}$  une base de  $E$ ,  $(\bullet, \bullet) : E \times E \rightarrow K$  une forme bilinéaire symétrique,  $Q$  un endomorphisme de  $E$ , et  $(\bullet, \bullet)_Q : E \times E \rightarrow K$  la forme bilinéaire associée à  $Q : (x, y)_Q = (x, Qy)$ . Alors

$$(e_i, e_j)_Q = (e_i, e_j) \cdot (\text{matrice associée à } Q).$$

### 5.3 Quelques exemples et méthodes calculatoires

Le lemme suivant est utile dans les calculs.

**Lemme 84.** Soit  $\varphi_{uu}$  le champ de vecteurs  $p \mapsto \partial_{uu}\varphi(\varphi^{-1}(p))$ ; admettons des notations analogues pour  $\varphi_{uv}$  et  $\varphi_{vv}$ . Alors les formules suivantes sont vraies

$$e_\varphi(p) = \langle \varphi_{uu}(p), \mathbf{N}(p) \rangle, \quad f_\varphi(p) = \langle \varphi_{uv}(p), \mathbf{N}(p) \rangle, \quad g_\varphi(p) = \langle \varphi_{vv}(p), \mathbf{N}(p) \rangle.$$

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{N}_0 := \mathbf{N} \circ \varphi$ . Comme  $\langle \partial_u \varphi, \mathbf{N} \circ \varphi \rangle = 0$  partout, il suit que

$$\langle \partial_{uu} \varphi, \mathbf{N}_0 \rangle = -\langle \partial_u \varphi, \partial_u \mathbf{N}_0 \rangle.$$

Un instant de réflexion montre que  $\partial_u \mathbf{N}_0(\varphi^{-1}(p)) = D\mathbf{N}(p) \cdot \varphi_u(p)$  et donc  $e_\varphi = \langle \varphi_{uu}, \mathbf{N} \rangle$ . La preuve des autres identités est analogue.  $\square$

*Exemple 85.* Soit

$$\varphi : (\pi/2, \pi/2) \times (b - \pi, b + \pi) \rightarrow \mathbf{S}, \quad (u, \theta) \mapsto (\cos u \cos \theta, \cos u \sin \theta, \sin u)$$

le paramétrage local défini dans l'Exemple 7. Alors

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= -\varphi, \\ \varphi_{u\theta} &= (\sin(u) \sin(\theta), -\sin(u) \cos(\theta), 0), \\ \varphi_{\theta\theta} &= -(\cos(u) \cos(\theta), \cos(u) \sin(\theta), 0). \end{aligned}$$

Donc

$$e = 1, \quad f = 0, \quad g = \cos^2(u).$$

Comme  $\cos^2(u) = |\partial_u \varphi \times \partial_\theta \varphi|^2 = EG - F^2$ , la formule (81) nous donne  $K \equiv 1$ . ■

*Exemple 86.* Prenons  $C$  une courbe régulière contenue dans le plan  $\mathbf{xz}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $\alpha = (\rho, 0, \zeta) : I_0 \rightarrow C$  un paramétrage local de  $C$  et soit

$$\varphi : I_0 \times J \rightarrow S, \quad (u, \theta) \mapsto (\rho(u) \cos(\theta), \rho(u) \sin(\theta), \zeta(u))$$

un paramétrage local de  $S = \text{Rot}(C)$  (voir §2.4). Alors

$$e = \frac{\rho'' \cdot \zeta' - \rho' \cdot \zeta''}{\|\alpha'\|}, \quad f = 0, \quad g = -\frac{\zeta' \cdot \rho}{\|\alpha'\|}$$

et

$$E = \|\alpha'\|^2, \quad F = 0, \quad G = \rho^2.$$

Il suit que

$$K = \frac{\zeta' \cdot (\rho' \cdot \zeta'' - \rho'' \cdot \zeta')}{\rho \cdot \|\alpha'\|^2}.$$

Un cas particulièrement intéressant arrive quand  $\|\alpha'\|^2 = \langle \alpha', \alpha' \rangle$  est constante égale à 1. Dans ce cas,  $\rho' \cdot \rho'' = -\zeta' \cdot \zeta''$  et donc

$$K = -\frac{\rho''}{\rho}.$$

■

*Exemple 87.* Nous utilisons les formules précédentes pour étudier la fonction  $K : \mathbf{T} \rightarrow \mathbb{R}$  sur le tore. Rappelons que (voir l'Exemple 17) les paramétrages de  $\mathbf{T}$  sont obtenus à partir des restrictions de la fonction

$$\varphi(u, \theta) = ((2 + \cos(u)) \cdot \cos(\theta), (2 + \cos(u)) \cdot \sin(\theta), \sin(u)).$$

Il suit que

$$K(\varphi(u, v)) = \frac{\cos(u)}{(2 + \cos(u))}.$$

Soit  $C = \{(x, 0, z) \mid (x - 2)^2 + z^2 = 1\}$  le cercle qui engendre  $\mathbf{T}$ . Si  $p$  et  $p'$  sont obtenus par la rotation d'un même point de  $C$ , il suit que  $K(p) = K(p')$ . Soit  $L \subseteq \mathbf{xz}$  la droite donnée par  $x = 2$ , et soient  $C^{\text{droite}}$ , resp.  $C^{\text{gauche}}$  le demi-cercle ouvert de  $C$  à droite de  $L$ , resp. à gauche de  $L$ .

Alors

$K(p) = 0$  si  $p$  est obtenu en tournant  $(2, 0, 1)$  ou  $(2, 0, -1)$ .

$K(p) > 0$  si  $p$  est obtenu en tournant un point de  $C^{\text{droite}}$ .

$K(p) < 0$  si  $p$  est obtenu en tournant un point de  $C^{\text{gauche}}$ .

■

Nous allons maintenant utiliser des courbes dans la surface  $S$  pour calculer la courbure en  $p \in S$ . Soit  $\alpha : (a, A) \rightarrow U$  une courbe différentiable contenue dans l'image d'un paramétrage  $\varphi : U_0 \rightarrow U$ . Comme la fonction différentiable (le lecteur devra se certifier qu'il a compris pourquoi cette fonction est différentiable)

$$u \mapsto \langle \alpha'(u), \mathbf{N} \circ \alpha(u) \rangle$$

est identiquement nulle, nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \langle \alpha''(u), \mathbf{N} \circ \alpha(u) \rangle &= \langle \alpha'(u), -(\mathbf{N} \circ \alpha)'(u) \rangle \\ &= \langle \alpha'(u), -D\mathbf{N}(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) \rangle \\ &= \Pi_{\alpha(u)}(\alpha'(u)). \end{aligned} \tag{88}$$

À l'aide de l'équation (88) et des inégalités (78), pouvons remarquer le fait suivant :

**Lemme 89.** Soit  $\alpha : (a, A) \rightarrow S$  une courbe différentiable qui passe par  $p$  en  $u = u_0$ . Si  $\alpha''(u_0) \in T_p S$  (un cas typique étant  $\alpha''(u_0) = 0$ ), alors  $K(p) \leq 0$ . En particulier, s'il existe une droite contenue en  $S$  qui passe par  $p$ , alors  $K(p) \leq 0$ .



*Démonstration.* D'après (88),  $\Pi_p(\alpha'(u)) = 0$ . D'après (78),  $k_{\min}(p) \leq 0$  et  $k_{\max}(p) \geq 0$  donc,  $K(p) = k_{\min}(p) \cdot k_{\max}(p) \leq 0$ .  $\square$

L'équation (88) possède encore une autre application dans la détermination géométrique de la courbure. Soit  $v \in T_p S$  tel que  $|v| = 1$ , et soit

$$P_v := p + \mathbb{R} \cdot v + \mathbb{R} \cdot \mathbf{N}(p).$$

Il existe alors un voisinage  $U$  de  $p$  et une courbe différentiable  $\alpha : (a, A) \rightarrow S$ , dont la vitesse ne s'annule jamais, tels que  $P_v \cap U = \text{Im}(\alpha)$ . Admettons que  $\alpha$  passe par  $p$  en  $u = u_0$ , et que sa vitesse scalaire est constante égale à un. Une fois que  $\alpha'(u_0)$  appartient à  $T_p S = \mathbf{N}(p)^\perp$  et au plan  $\mathbb{R} \cdot v + \mathbb{R} \cdot \mathbf{N}(p)$ , il suit que

$$\alpha'(u_0) = \pm v.$$

Comme  $\alpha''(u_0) \in \mathbb{R} \cdot v + \mathbb{R} \cdot \mathbf{N}(p)$  et  $2\langle \alpha', \alpha'' \rangle = 0$ , il en résulte que

$$\alpha''(u_0) = \pm |\alpha''(u_0)| \cdot \mathbf{N}(p).$$

La formule (88) nous donne alors

$$\Pi_p(v) = \pm |\alpha''(u_0)|. \quad (90)$$

## 5.4 Le signe de la courbure

Pour mieux comprendre l'importance géométrique de la deuxième forme fondamentale et de la courbure, nous commençons la discussion suivante. Fixons d'abord  $p = \varphi(u_0, v_0)$ , où  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  est un paramétrage local. Considérons maintenant  $(u_0 + r, v_0 + s) \in U_0$ . La distance entre le plan

$$p + T_p S$$

et  $\varphi(u_0 + r, v_0 + s)$  est exactement la valeur absolue de

$$d_p(r, s) = \langle \varphi(u_0 + r, v_0 + s) - p, \mathbf{N}(p) \rangle.$$

Par la formule de Taylor et les formules du Lemme 84, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} d_p(r, s) &= \left\langle \varphi_u(p) \cdot r + \varphi_v(p) \cdot s + \frac{1}{2} \left( \varphi_{uu}(p) \cdot r^2 + 2\varphi_{uv}(p) \cdot rs + \varphi_{vv}(p) \cdot s^2 \right) + R, \mathbf{N}(p) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \varphi_{uu}(p), \mathbf{N}(p) \rangle \cdot r^2 + \frac{1}{2} \langle \varphi_{vv}(p), \mathbf{N}(p) \rangle \cdot s^2 + \langle \varphi_{uv}(p), \mathbf{N}(p) \rangle \cdot rs + \langle R, \mathbf{N}(p) \rangle \\ &= \frac{1}{2} e_\varphi(p) \cdot r^2 + \frac{1}{2} g_\varphi(p) \cdot s^2 + f_\varphi(p) \cdot rs + \langle R, \mathbf{N}(p) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \Pi_p(r\varphi_u(p) + s\varphi_v(p)) + (r^2 + s^2) \cdot \varepsilon(r, s), \end{aligned} \quad (91)$$

où

$$\lim_{(r,s) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(r, s) = 0.$$

Le plan  $P := p + T_p S \llbracket \text{divise} \rrbracket \mathbb{R}^3$  en

$$P^+ = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \langle q - p, \mathbf{N}(p) \rangle > 0\} \quad \text{et} \quad P^- = \{q \in \mathbb{R}^3 \mid \langle q - p, \mathbf{N}(p) \rangle < 0\}.$$

Le signe de  $K(p)$  permet de déterminer si, proche à  $p$ ,  $S$  est contenue dans un seul côté de  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposition 92.** (i) Si  $K(p) > 0$ , il existe un voisinage  $U \subseteq S$  de  $p$  totalement contenu dans  $P^+$  ou  $P^-$ .

(ii) Si  $K(p) < 0$ , n'importe quel voisinage de  $p$  en  $S$  possède des points dans  $P^+$  et  $P^-$ .

*Démonstration.* Posons

$$\begin{aligned} Q(r, s) &:= \frac{1}{2} \Pi_p(r\varphi_u(p) + s\varphi_v(p)) \\ &= \frac{1}{2} e_\varphi(p) \cdot r^2 + \frac{1}{2} g_\varphi(p) \cdot s^2 + f_\varphi(p) \cdot rs, \end{aligned}$$

et

$$Q_0(x) = Q(x, 1), \quad Q_1(x) = Q(1, x).$$

Alors la formule (81) donne

$$\begin{aligned} (E_\varphi(p)G_\varphi(p) - F_\varphi(p)^2) \cdot K(p) &= (e_\varphi(p)g_\varphi(p) - f_\varphi(p)^2) \\ &= -\text{discriminant } Q_0 \\ &= -\text{discriminant } Q_1. \end{aligned}$$

Si  $K(p) > 0$ , les polynômes  $Q_0, Q_1$  ne possèdent pas des racines réelles; si  $r \neq 0$ , respectivement  $s \neq 0$ , nous obtenons que  $Q(r, s) = r^2 Q(1, s/r) = r^2 Q_1(s/r) \neq 0$ , respectivement  $Q(r, s) = s^2 Q(r/s, 1) = s^2 Q_0(r/s) \neq 0$ . Il suit que  $Q$  s'annule que en  $(0, 0)$ . Alors, l'intervalle fermé

$$Q(\{(r, s) \in \mathbb{R}^2 : r^2 + s^2 = 1\}) \subset \mathbb{R}$$

ne peut pas contenir 0. Comme conséquence nous obtenons que, sur le cercle  $\{(r, s) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 + s^2 = 1\}$ , la forme  $Q$  satisfait  $Q \geq \delta > 0$ , ou  $Q \leq \delta < 0$ , d'où

$$d_p(r, s) = (r^2 + s^2) \left\{ Q\left(\frac{(r, s)}{\|(r, s)\|}\right) + \varepsilon(r, s) \right\}$$

a toujours le même signe si  $0 < \|(r, s)\|$  est petite.

Si  $K(p) < 0$ , le polynôme  $Q_0$  possède des racines réelles différentes. Alors il existe  $r_+, r_-$  tels que  $Q(r_-, 1) < 0$  et  $Q(r_+, 1) > 0$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} d_p(\rho \cdot r_+, \rho) &= Q(\rho \cdot r_+, \rho) + \rho^2 \cdot (r_+^2 + 1) \cdot \varepsilon(\rho \cdot r_+, \rho) \\ &= \rho^2 (Q(r_+, 1) + (r_+^2 + 1) \cdot \varepsilon(\rho \cdot r_+, \rho)) \end{aligned}$$

est strictement positif si  $\rho$  est petit. Le même argument nous amène à en déduire qu'il y a des valeurs de  $(\rho \cdot r_-, \rho)$  pour lesquels  $d_p$  est strictement négatif.  $\square$

Comme application, le lecteur peut se convaincre très rapidement que chaque point d'un ellipsoïde a courbure positive.

Finalement, nous terminons avec une proposition qui est restreint beaucoup le comportement global de la courbure d'une surface régulière compacte.

**Proposition 93.** *Si  $S$  est compacte, alors il existe un point  $p$  tel que  $K(p) > 0$ .*

*Démonstration.* Soit  $m \in S$  un point de  $S$  où la fonction

$$S \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \|p\|^2$$

atteint un maximum (un tel point  $p_0$  existe, car  $S$  est compacte). Nous allons montrer que  $K(m) > 0$ . D'abord, remarquons que  $m \perp T_m S$  : si  $\alpha : (a, A) \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une courbe différentiable contenue dans  $S$  qui passe par  $p$  en  $t = t_0$ , alors  $\langle \alpha'(t_0), \alpha(t_0) \rangle = 0$ , car la fonction  $t \mapsto \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle$  possède un maximum en  $t = t_0$ . Nous concluons que si  $\mathbf{N}$  est une orientation sur un voisinage  $U$  de  $m$ , alors

$$\mathbf{N}(m) = \pm \frac{m}{\|m\|}.$$

La formule (88) affirme que si  $\alpha : (a, A) \rightarrow U$  est une courbe différentiable qui en  $t = t_0$  passe par  $p$  avec vitesse  $w$ , alors

$$\begin{aligned} \Pi_m(w) &= \langle \alpha''(t_0), \mathbf{N}(m) \rangle \\ &= \frac{\pm 1}{\|m\|} \langle \alpha''(t_0), m \rangle; \end{aligned} \tag{94}$$

Comme  $t = t_0$  est un maximum pour la fonction  $t \mapsto |\alpha(t)|^2$ , nous en déduisons que

$$\langle \alpha''(t_0), \alpha(t_0) \rangle + \langle \alpha'(t_0), \alpha'(t_0) \rangle \leq 0.$$

Donc,

$$\langle \alpha''(t_0), m \rangle \leq -\|w\|^2. \tag{95}$$

Maintenant (95) et (94) ensemble impliquent que soit  $\Pi_m(w) \leq -\|w\|/\|m\|$ , soit  $\Pi_m(w) \geq \|w\|/\|m\|$ .

□

## 5.5 Le théorème de Gauss sur la nature intrinsèque de la courbure

Gauss lui-même a baptisé le Théorème 96 ci-dessous « egregium » ; en Latin, cet adjectif signifie approximativement<sup>6</sup> « illustre. » Il nous permet de dire que la courbure est quelque chose complètement déterminée par la première forme fondamentale. Dit autrement, nous aurons pu définir  $K$  sans parler du champ normal  $\mathbf{N}$ . La preuve que nous donnons du Théorème 96 est basée sur une coïncidence mystique—c'est le Lemme 102—et le lecteur est invité à oublier un tel accident, ou, meilleur encore, approfondir ses études de Géométrie pour comprendre les autres preuves, qui sont plus conceptuelles.

6. Du Latin, « Ex » = hors, et « grex », ou « greg », signifie troupeau.

**Théorème 96.** Soit  $h : S \rightarrow S'$  une isométrie locale. Alors pour chaque point  $p \in S$ , nous avons

$$K(h(p)) = K(p).$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  un paramétrage local de  $S$  et soient  $E, F, G : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$  les coefficients de la première forme fondamentale (voir Définition 57). Nous allons montrer l'affirmation suivante :

*Affirmation :* La fonction  $K := K \circ \varphi^{-1}$  peut s'écrire en terme des fonctions  $E, F, G$  et ses dérivées partielles.

Une fois prouvée telle affirmation, le Théorème en découle, car si  $h : U \rightarrow U'$  est une isométrie entre des ouverts, alors  $\varphi' = h \circ \varphi : U_0 \rightarrow U'$  est un paramétrage local de  $S'$  et  $(E_{\varphi'}, F_{\varphi'}, G_{\varphi'}) = (E_{\varphi}, F_{\varphi}, G_{\varphi})$ . La preuve de l'affirmation se fait en deux étapes.

*Première étape :* Posons  $\mathbf{N}_0 := \mathbf{N} \circ \varphi$ . Pour chaque  $p_0 \in U_0$ , les vecteurs  $\partial_u \varphi(p_0), \partial_v \varphi(p_0), \mathbf{N}_0(p_0)$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ . Il suit que

$$\begin{aligned}\partial_{uu} \varphi &= \Gamma_{uu}^u \cdot \partial_u \varphi + \Gamma_{uu}^v \cdot \partial_v \varphi + \Lambda_{uu} \cdot \mathbf{N}_0 \\ \partial_{uv} \varphi &= \Gamma_{uv}^u \cdot \partial_u \varphi + \Gamma_{uv}^v \cdot \partial_v \varphi + \Lambda_{uv} \cdot \mathbf{N}_0 \\ \partial_{vv} \varphi &= \Gamma_{vv}^u \cdot \partial_u \varphi + \Gamma_{vv}^v \cdot \partial_v \varphi + \Lambda_{vv} \cdot \mathbf{N}_0,\end{aligned}\tag{97}$$

où les fonctions  $\Gamma$  et  $\Lambda$  sont différentiables en  $U_0$ . En fait, d'après le Lemme 84,

$$\Lambda_{uu} = e, \quad \Lambda_{uv} = f, \quad \text{et} \quad \Lambda_{vv} = g.\tag{98}$$

Pour obtenir plus d'information sur les fonctions  $\Gamma$ , nous prenons des produits scalaires :

$$\begin{aligned}\langle \partial_{uu} \varphi, \partial_u \varphi \rangle &= \Gamma_{uu}^u \cdot E + \Gamma_{uu}^v \cdot F \\ \langle \partial_{uu} \varphi, \partial_v \varphi \rangle &= \Gamma_{uu}^u \cdot F + \Gamma_{uu}^v \cdot G,\end{aligned}\tag{99}$$

$$\begin{aligned}\langle \partial_{uv} \varphi, \partial_u \varphi \rangle &= \Gamma_{uv}^u \cdot E + \Gamma_{uv}^v \cdot F \\ \langle \partial_{uv} \varphi, \partial_v \varphi \rangle &= \Gamma_{uv}^u \cdot F + \Gamma_{uv}^v \cdot G,\end{aligned}\tag{100}$$

et

$$\begin{aligned}\langle \partial_{vv} \varphi, \partial_u \varphi \rangle &= \Gamma_{vv}^u \cdot E + \Gamma_{vv}^v \cdot F \\ \langle \partial_{vv} \varphi, \partial_v \varphi \rangle &= \Gamma_{vv}^u \cdot F + \Gamma_{vv}^v \cdot G.\end{aligned}\tag{101}$$

Une fois que  $E = \langle \partial_u \varphi, \partial_u \varphi \rangle, F = \langle \partial_u \varphi, \partial_v \varphi \rangle$  et  $G = \langle \partial_v \varphi, \partial_v \varphi \rangle$ , il suit que

$$\begin{aligned}\partial_u E &= 2 \langle \partial_{uu} \varphi, \partial_u \varphi \rangle, & \partial_v E &= 2 \langle \partial_{uv} \varphi, \partial_u \varphi \rangle, \\ \partial_u G &= 2 \langle \partial_{uv} \varphi, \partial_v \varphi \rangle, & \partial_v G &= 2 \langle \partial_{vv} \varphi, \partial_v \varphi \rangle, \\ \partial_u F &= \langle \partial_{uu} \varphi, \partial_v \varphi \rangle + \frac{1}{2} \partial_v E, & \partial_v F &= \langle \partial_{vv} \varphi, \partial_u \varphi \rangle + \frac{1}{2} \partial_u G.\end{aligned}$$

Comme le déterminant de chacun des systèmes linéaires (99)–(101) est  $EG - F^2$ , les fonctions  $\Gamma$ , qui sont des solutions de ces systèmes, peuvent toujours être écrites comme

$$\frac{\text{Polynôme en } E, F, G \text{ et ses dérivées partielles}}{EG - F^2}.$$

Deuxième étape : D'après la première étape, il suffit de prouver le lemme suivant.

**Lemme 102.** La fonction  $K : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$  est égale à

$$\frac{1}{E} (\partial_v \Gamma_{uu}^v + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v - \partial_u \Gamma_{uv}^v - \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v - \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^v). \quad (103)$$

Démonstration. D'après (97) et (98),

$$\begin{aligned} \partial_v \Gamma_{uu}^u \cdot \partial_u \varphi + \Gamma_{uu}^u \cdot \partial_{uv} \varphi + \partial_v \Gamma_{uu}^v \cdot \partial_v \varphi + \Gamma_{uu}^v \cdot \partial_{vv} \varphi + \partial_v e \cdot \mathbf{N}_0 + e \cdot \partial_v \mathbf{N}_0 &= \partial_v (\partial_{uu} \varphi) \\ &= \partial_u (\partial_{uv} \varphi) \\ &= \partial_u \Gamma_{uv}^u \cdot \partial_u \varphi + \Gamma_{uv}^u \cdot \partial_{uu} \varphi + \partial_u \Gamma_{uv}^v \cdot \partial_v \varphi + \Gamma_{uv}^v \cdot \partial_{vu} \varphi + \partial_u f \cdot \mathbf{N}_0 + f \cdot \partial_u \mathbf{N}_0. \end{aligned} \quad (104)$$

Comme dans la section 5.2, soit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

la matrice de  $-DN$  par rapport à la base  $\{\partial_u \varphi, \partial_v \varphi\}$ , c'est à dire

$$\begin{aligned} -\partial_u \mathbf{N}_0 &= a_{11} \cdot \partial_u \varphi + a_{21} \cdot \partial_v \varphi \\ -\partial_v \mathbf{N}_0 &= a_{12} \cdot \partial_u \varphi + a_{22} \cdot \partial_v \varphi. \end{aligned}$$

En utilisant les formules (97), nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_v \Gamma_{uu}^u \cdot \partial_u \varphi + \Gamma_{uu}^u \cdot \partial_{uv} \varphi + \partial_v \Gamma_{uu}^v \cdot \partial_v \varphi + \Gamma_{uu}^v \cdot \partial_{vv} \varphi + \partial_v e \cdot \mathbf{N}_0 + e \cdot \partial_v \mathbf{N}_0 &= \\ = (\partial_v \Gamma_{uu}^v - e \cdot a_{22} + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v) \cdot \partial_v \varphi + W \cdot \partial_u \varphi + X \cdot \mathbf{N}_0, \end{aligned} \quad (105)$$

et, par une procédure analogue

$$\begin{aligned} \partial_u \Gamma_{uv}^u \cdot \partial_u \varphi + \Gamma_{uv}^u \cdot \partial_{uu} \varphi + \partial_u \Gamma_{uv}^v \cdot \partial_v \varphi + \Gamma_{uv}^v \cdot \partial_{vu} \varphi + \partial_u f \cdot \mathbf{N}_0 + f \cdot \partial_u \mathbf{N}_0 &= \\ = (\partial_u \Gamma_{uv}^v - f \cdot a_{21} + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^v) \cdot \partial_v \varphi + Y \cdot \partial_u \varphi + Z \cdot \mathbf{N}_0 \end{aligned} \quad (106)$$

Les équations (105) et (106) nous permettent d'en tirer de (104) que

$$\partial_v \Gamma_{uu}^v - e \cdot a_{22} + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v = \partial_u \Gamma_{uv}^v - f \cdot a_{21} + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^v \quad (107)$$

Maintenant nous utilisons l'équation (voir §5.2)

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$a_{22} = \frac{-Ff + Eg}{EG - F^2}, \quad \text{et} \quad a_{21} = \frac{-Fe + Ef}{EG - F^2}.$$

En récrivant l'équation (107), et utilisant

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad (\text{voir (81)})$$

nous obtenons

$$\partial_v \Gamma_{uu}^v + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^v - (\partial_u \Gamma_{uv}^v + \Gamma_{uv}^u \Gamma_{uu}^v + \Gamma_{uv}^v \Gamma_{uv}^v) = ea_{22} - fa_{21} = EK.$$

□

Nous avons donc prouvé le lemme, et, par conséquent, le Théorème de Gauss. □

Il est important de remarquer que même si la courbure de Gauss est invariante, la courbure moyenne, et *a fortiori* les courbures principales, ne le sont pas. C'est la raison d'être de l'exemple suivant.

*Exemple 108.* Reprenons les notations et définitions de l'Exemple 60. Nous allons montrer que l'isométrie  $h : B \rightarrow S$  ne *présERVE pas* la courbure moyenne :

$$H(p) = 0 \neq H(\varphi(p)).$$

Comme l'application normale de Gauss  $B \rightarrow \mathbb{R}^3$  est constante (égale à  $(0, 0, 1)$ ), il est clair que  $H(p) = 0$  pour chaque  $p$ . De l'autre côté,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_\varphi(\varphi(u, v)) &= \frac{\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi}{\|\partial_u \varphi \times \partial_v \varphi\|}(u, v) \\ &= (\cos(u), \sin(u), 0). \end{aligned}$$

Munissons  $S$  avec l'orientation  $\mathbf{N}_\varphi$ . Il suit que

$$-D\mathbf{N}(\varphi(u, v)) \cdot \partial_u \varphi(u, v) = -\partial_u \varphi(u, v) \quad \text{et} \quad -D\mathbf{N}(\varphi(u, v)) \cdot \partial_v \varphi(u, v) = 0.$$

Par conséquent, la matrice de  $-D\mathbf{N}$  est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la courbure moyenne est constante égale à  $-1/2$ .

■

## 6 Les géodésiques

Dans ce paragraphe, nous fixons  $S$  une surface régulière munie d'une orientation  $\mathbf{N} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Comme d'habitude,  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  note un paramétrage local de  $S$ .

### 6.1 Définition

**Définition 109.** Soit  $\gamma : (a, A) \rightarrow S$  une courbe différentiable. Nous dirons que  $\gamma$  est **géodésique** en  $u = u_0$  si  $\gamma''(u_0)$  est orthogonal à  $T_{\gamma(u_0)}S$ . La courbe  $\gamma$  est une géodésique si  $\gamma$  est géodésique en chaque  $u_0 \in (a, A)$ .

*Exemple 110.* (a) Il est clair que si  $\gamma$  est une **droite**, c'est à dire  $\gamma'' \equiv 0$ , alors  $\gamma$  est toujours une géodésique.

(b) Soit  $\gamma_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{S}$ ,  $u \mapsto (\cos(u), 0, \sin(u))$ . Alors  $\gamma_0'' = -\gamma_0$  et donc  $\gamma_0$  est une géodésique. Puisque les autres grands cercles de la sphère  $\mathbf{S}$  sont obtenus par des rotations de  $\gamma_0$ , il suit que chaque grand cercle est une géodésique.

(c) Soit  $S = C \times \mathbb{R}$ , où  $C$  est une courbe régulière en  $\mathbb{R}^2$  ( $S$  est un cylindre généralisé, voir Fig. 10).

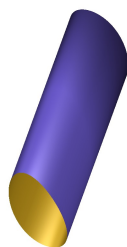


FIGURE 10 – Cylindre.

Les droites  $u \mapsto (p_1, p_2, u)$  sont clairement des géodésiques (car l'accélération est nulle); une famille de géodésiques plus intéressante est donnée par les sections :

$$\gamma(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), c),$$

avec  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : (a, A) \rightarrow C$  un paramétrage local de  $C$  **tel que  $\alpha$  possède vitesse scalaire constante**. En fait, soit  $\alpha$  un tel paramétrage; la fonction  $\varphi(u, v) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), v)$  est un paramétrage local de  $S$  et

$$\langle \gamma'', \varphi_u \circ \gamma \rangle = \alpha_1'' \cdot \alpha_1' + \alpha_2'' \cdot \alpha_2' = 0 \quad \text{et} \quad \langle \gamma'', \varphi_v \circ \gamma \rangle = 0.$$

■

Une propriété élémentaire des géodésiques est la suivante.

**Lemme 111.** Soit  $\gamma : (a, A) \rightarrow S$  une géodésique. Alors sa vitesse scalaire est constante.

*Démonstration.* Nous laissons la preuve comme exercice au lecteur.  $\square$

Le lemme nous dit que nous ne pouvons pas changer le paramétrage d'une géodésique de façon arbitraire sans perdre la propriété d'être une géodésique. Un exemple très simple de l'importance du paramétrage est donné par

$$\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{xy}, \quad t \mapsto (t^3, 0, 0)$$

qui n'est pas une géodésique de  $\mathbb{R}^2 = \mathbf{xy}$ , tandis que son image est l'image d'une géodésique.

## 6.2 Les équations des géodésiques

Soit  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  un paramétrage local de  $S$  et soit  $(u, v) : (a, A) \rightarrow U_0$  une courbe différentiable. Nous voulons déterminer quels sont les conditions imposées sur  $u$  et  $v$  pour que  $t \mapsto \varphi(u(t), v(t))$  soit une géodésique. Comme pour chaque  $p_0 \in U_0$  l'ensemble  $\{\partial_u \varphi(p_0), \partial_v \varphi(p_0), \mathbf{N}(p_0)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ , nous pouvons exprimer les vecteurs  $\partial_{uu} \varphi, \partial_{uv} \varphi = \partial_{vu} \varphi, \partial_{vv} \varphi$  comme suit :

$$\begin{aligned} \partial_{uu} \varphi &= \Gamma_{uu}^u \cdot \partial_u \varphi + \Gamma_{uu}^v \cdot \partial_v \varphi + \Lambda_{uu} \cdot \mathbf{N} \\ \partial_{uv} \varphi &= \Gamma_{uv}^u \cdot \partial_u \varphi + \Gamma_{uv}^v \cdot \partial_v \varphi + \Lambda_{uv} \cdot \mathbf{N} \\ \partial_{vu} \varphi &= \Gamma_{vu}^u \cdot \partial_u \varphi + \Gamma_{vu}^v \cdot \partial_v \varphi + \Lambda_{vu} \cdot \mathbf{N} \\ \partial_{vv} \varphi &= \Gamma_{vv}^u \cdot \partial_u \varphi + \Gamma_{vv}^v \cdot \partial_v \varphi + \Lambda_{vv} \cdot \mathbf{N}. \end{aligned} \tag{112}$$

Les fonctions  $\Gamma : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$  dans (112) sont appelées les **symboles de Christoffel**. Elles ont déjà intervenu dans la preuve du théorème de Gauss, Théorème 96. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \text{coeff. de } \gamma'' \text{ par rapport à } \partial_u \varphi &= u'' + \Gamma_{uu}^u \cdot u'^2 + 2\Gamma_{uv}^u \cdot u'v' + \Gamma_{vv}^u \cdot v'^2 \\ \text{coeff. de } \gamma'' \text{ par rapport à } \partial_v \varphi &= v'' + \Gamma_{vv}^v \cdot v'^2 + 2\Gamma_{uv}^v \cdot u'v' + \Gamma_{uu}^v \cdot u'^2 \end{aligned} \tag{113}$$

Nous rassemblons nos élaborations dans une

**Proposition 114.** Soit  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  un paramétrage local de  $S$  et soient  $\Gamma$  les fonctions déterminées par le système d'équations (112). Alors une courbe  $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$  est une géodésique si, et seulement si, les fonctions  $u, v$  satisfont le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{uu}^u \cdot u'^2 + 2\Gamma_{uv}^u \cdot u'v' + \Gamma_{vv}^u \cdot v'^2 = 0 \\ v'' + \Gamma_{vv}^v \cdot v'^2 + 2\Gamma_{uv}^v \cdot u'v' + \Gamma_{uu}^v \cdot u'^2 = 0. \end{cases} \tag{115}$$

*Remarques 116.* Une mnémonique pour les équations des géodésiques est donnée par les matrices symétriques

$$\Gamma^u = \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u & \Gamma_{uv}^u \\ \Gamma_{uv}^u & \Gamma_{vv}^u \end{pmatrix}, \quad \Gamma^v = \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v \\ \Gamma_{uv}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix}.$$



Les équations des géodésiques sont alors

$$\begin{cases} u'' + \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \cdot \Gamma^u \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0 \\ v'' + \begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \cdot \Gamma^v \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 0. \end{cases} \quad (117)$$

Un des résultats fondamentaux des Mathématiques est le suivant.

**Théorème 118** (Théorème d'existence et unicité des EDOs). *Soient  $I$  un intervalle ouvert et  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un ouvert. Soit  $H : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction différentiable. Étant donné un  $t_0 \in I$  et un  $p_0 \in U$ , il existe un intervalle ouvert  $J \subseteq I$  contenant  $t_0$  et une fonction différentiable  $x : J \rightarrow U$  telle que*

$$x'(t) = H(t, x), \quad x(t_0) = p_0. \quad (119)$$

De plus, si  $\tilde{x} : \tilde{J} \rightarrow U$  est une autre fonction différentiable satisfaisant les équations (119), alors  $x \equiv \tilde{x}$  en  $J \cap \tilde{J}$ .

**Corollaire 120.** *Soit  $p \in S$  quelconque et soit  $w \in T_p S$ . Alors il existe une unique géodésique*

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$$

qui en  $t = 0$  passe par  $p$  avec vitesse  $w$ .

*Démonstration.* Prenons, comme avant, un paramétrage local  $\varphi : U_0 \rightarrow U$ ; nous écrivons  $p_0 = \varphi^{-1}(p)$  et  $w_0 = (D\varphi(p_0))^{-1} \cdot w$ . Considérons les fonctions  $H_1, H_2 : U_0 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} H_1(u, v, \dot{u}, \dot{v}) &= \Gamma_{uu}^u \cdot \dot{u}^2 + 2\Gamma_{uv}^u \cdot \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{vv}^u \cdot \dot{v}^2, \\ H_2(u, v, \dot{u}, \dot{v}) &= \Gamma_{vv}^v \cdot \dot{v}^2 + 2\Gamma_{uv}^v \cdot \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{uu}^v \cdot \dot{u}^2. \end{aligned}$$

(Les fonctions  $\Gamma_{**}^*$  :  $U_0 \rightarrow \mathbb{R}$  dans les équations précédentes sont celles obtenues en (112).)

Posons

$$H : \mathbb{R} \times (U_0 \times \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad (t, u, v, \dot{u}, \dot{v}) \mapsto (\dot{u}, \dot{v}, -H_1(u, v, \dot{u}, \dot{v}), -H_2(u, v, \dot{u}, \dot{v})).$$

Si  $x = (u, v, \dot{u}, \dot{v}) : (a, A) \rightarrow U_0 \times \mathbb{R}^2$  est telle que

$$x'(t) = (u'(t), v'(t), \dot{u}'(t), \dot{v}'(t)) = H(u(t), v(t), \dot{u}(t), \dot{v}(t)),$$

il suit que  $u' = \dot{u}$  et  $v' = \dot{v}$ . Par conséquent,  $t \mapsto (u(t), v(t))$  est solution du système (115). C'est à dire,  $\gamma : t \mapsto \varphi(u(t), v(t))$  est une géodésique de  $S$ . Si en plus, nous imposons

$$x(t_0) = (p_0, w_0) \in U_0 \times \mathbb{R}^2,$$

il suit que

$$(u(t_0), v(t_0)) = p_0, \quad \text{et} \quad (u'(t_0), v'(t_0)) = w_0.$$

Donc

$$\gamma(t_0) = \varphi(p_0) = p$$

et

$$\gamma'(t_0) = u'(t_0) \cdot \partial_u \varphi(p_0) + v'(t_0) \cdot \partial_v \varphi(p_0) = w.$$

□

*Exemple 121.* Nous pouvons utiliser la partie sur l'unicité des géodésiques pour montrer que toutes les géodésiques de  $\mathbf{S}$  sont des (morceaux des) grand cercles. Nous rappelons qu'un grand cercle est une courbe différentiable

$$\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{S}$$

ayant la forme<sup>7</sup>

$$R \cdot (\cos(r \cdot t + s), \sin(r \cdot t + s), 0), \quad r, s \in \mathbb{R} \text{ et } R \text{ une rotation de } \mathbb{R}^3.$$

Si  $\gamma : (a, A) \rightarrow \mathbf{S}$  est géodésique qui en  $t = t_0$  passe par  $p$  avec vitesse  $w$ , alors nous pouvons trouver un grand cercle  $\sigma$  qui en  $t = t_0$  passe par  $p$  avec vitesse  $w$  : une fois que  $\gamma$  et  $\sigma$  sont des géodésiques qui passent par  $p$  avec même vitesse, il suit que  $\gamma \equiv \sigma$ .

■

### 6.3 La minimisation des distances

Considérons le problème suivant. Fixons  $b < a < A < B \in \mathbb{R}$ ,  $p, q \in S$ , et notons

$$\Omega_{p,q}(a, b, A, B)$$

l'ensemble des courbes différentiables  $\alpha : (b, B) \rightarrow S$  qui, en  $t = a$  passent par  $p$ , et en  $t = A$  par  $q$ . Nous pouvons nous demander quelles sont les courbes  $\alpha \in \Omega_{p,q}(a, b, A, B)$  qui minimisent la fonction

$$\mathbf{L} : \Omega_{p,q}(a, b, A, B) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \alpha \mapsto \text{longueur} = \int_a^A |\alpha'(\tau)| d\tau.$$

(En fait, rien garantit qu'il existe une courbe qui minimise ladite fonction.) En suivant le principe du Calcul différentiel, nous allons fixer un élément  $\gamma \in \Omega_{p,q}(a, b, A, B)$  et étudier des petites variations de  $\gamma$ . Il sera plus commode de considérer l'**énergie**<sup>8</sup>, au lieu de  $\mathbf{L}$ . Posons

$$\mathbf{E}(\alpha) = \int_a^A |\alpha'(\tau)|^2 d\tau.$$

---

7. Cette convention, surtout la présence de la constante  $s$ , est un peu étrange, mais elle sert à nos envies.

8. Cette terminologie est expliquée par le concept mécanique d'énergie cinétique.

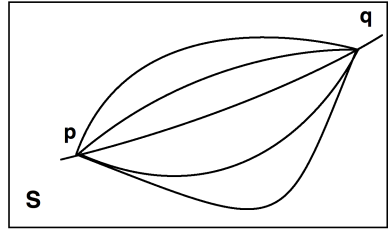


FIGURE 11 – Variation  $\Gamma$ .

**Définition 122.** Soit  $(b, B)$  un intervalle ouvert contenant l'intervalle  $[a, A]$ . Soit  $\gamma : (b, B) \rightarrow S$  une courbe différentiable qui en  $t = a$  passe par  $p$  et en  $t = A$  passe par  $q$ . Une **variation de  $\gamma$**  est une fonction différentiable

$$\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (b, B) \rightarrow S$$

telle que

1.  $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$ ,
2.  $\Gamma(s, a) = p$  et  $\Gamma(s, A) = q$ .

L'énergie d'une variation est la fonction

$$\mathbf{E}(s) = \int_a^A \|\partial_t \Gamma(s, \tau)\|^2 d\tau.$$

Il est clair que l'énergie est une fonction différentiable de  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  en  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ .

**Théorème 123.** Prenons  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  un paramétrage local de  $S$  et soit  $\Gamma$  une variation de  $\gamma$  dont l'image est contenue en  $U$ . Alors

$$\gamma \text{ est géodésique en } [a, A] \Leftrightarrow \mathbf{E}'(0) = 0.$$

*Démonstration.* Nous pouvons dériver sous le signe d'intégration car la fonction  $(s, \tau) \mapsto \langle \partial_t \Gamma(s, \tau), \partial_t \Gamma(s, \tau) \rangle$  est de classe  $C^\infty$  sur  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (b, B)$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= 2 \int_a^A \langle \partial_s \partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma \rangle d\tau \\ &= 2 \int_a^A \langle \partial_t \partial_s \Gamma, \partial_t \Gamma \rangle d\tau \\ &= 2 \int_a^A \frac{\partial}{\partial t} \langle \partial_s \Gamma, \partial_t \Gamma \rangle d\tau - 2 \int_a^A \langle \partial_s \Gamma, \partial_t \partial_t \Gamma \rangle d\tau \\ &= 2 \langle \partial_s \Gamma(\cdot, A), \partial_t \Gamma(\cdot, A) \rangle - 2 \langle \partial_s \Gamma(\cdot, a), \partial_t \Gamma(\cdot, a) \rangle - 2 \int_a^A \langle \partial_s \Gamma, \partial_t \partial_t \Gamma \rangle d\tau. \end{aligned} \tag{124}$$

Comme  $s \mapsto \Gamma(s, a)$  et  $s \mapsto \Gamma(s, A)$  sont constantes, il suit que  $\partial_s \Gamma(\cdot, a) = \partial_s \Gamma(\cdot, A) = 0$  et donc

$$\mathbf{E}' = -2 \int_a^A \langle \partial_s \Gamma, \partial_{tt} \Gamma \rangle. \tag{125}$$

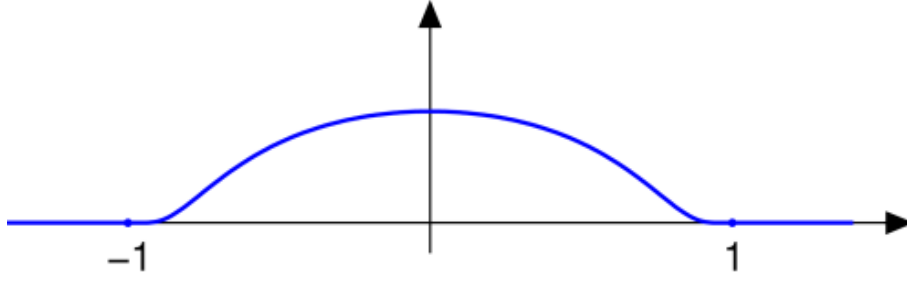


FIGURE 12 – La fonction  $\rho$ ,  $I = (-1, 1)$ .

Si  $\gamma = \Gamma(0, \cdot)$  est une géodésique, il suit que  $\partial_{tt}\Gamma(0, \cdot) \perp T_{\Gamma(0, \cdot)}S$ . Comme  $\partial_s\Gamma(0, t) \in T_{\Gamma(0, t)}S$ , il suit que  $E'(0) = 0$ . L'implication " $\Rightarrow$ " est prouvée.

Abordons alors " $\Leftarrow$ ". Supposons que  $\gamma$  n'est pas une géodésique en  $[a, A]$ ; nous allons construire une variation  $\Gamma$  de  $\gamma$  telle que  $E'(0) \neq 0$ . Posons  $\gamma_0 := (u, v) := \varphi^{-1} \circ \gamma$  et soient  $C_u, C_v : (b, B) \rightarrow \mathbb{R}$  les fonctions différentiables définies par

$$C_u(t) = \text{coeff. de } \gamma''(t) \text{ par rapport à } \partial_u\varphi(\gamma(t)),$$

$$C_v(t) = \text{coeff. de } \gamma''(t) \text{ par rapport à } \partial_v\varphi(\gamma(t)).$$

(L'expression de  $C_u$  et  $C_v$  est explicitée par les éqs. (113), mais ce n'est pas important.) D'après notre supposition, il existe un intervalle ouvert  $I \subseteq (a, A)$  tel que

$$(C_u(t), C_v(t)) \neq (0, 0), \quad \forall t \in I.$$

Soit  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  une fonction différentiable telle que

$$\rho(t) = \begin{cases} > 0, & \text{si } t \in I \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(L'existence de  $\rho$  n'est pas difficile à établir. Voir Fig. 12.)

Prenons

$$\Gamma_0(s, t) = (u(t) + s \cdot \rho(t) \cdot C_u(t), v(t) + s \cdot \rho(t) \cdot C_v(t)),$$

et  $\Gamma = \varphi \circ \Gamma_0$ . Une fois que  $\rho(a) = 0 = \rho(A)$  et  $\Gamma(0, \cdot) = \gamma$ ,  $\Gamma$  est bien une variation de  $\gamma$ . Il suit que

$$\begin{aligned} \partial_s\Gamma(0, t) &= D\varphi(\Gamma_0(0, t)) \cdot (\rho(t) \cdot C_u(t), \rho(t) \cdot C_v(t)) \\ &= \rho(t) \cdot \partial_u\varphi(\Gamma_0(0, t)) \cdot C_u(t) + \rho(t) \cdot \partial_v\varphi(\Gamma_0(0, t)) \cdot C_v(t) \\ &= \rho(t) \cdot \text{projection de } \gamma''(t) \text{ sur } T_{\gamma(t)}S. \end{aligned}$$

D'après l'égalité  $\partial_{tt}\Gamma(0, \cdot) = \gamma''(\cdot)$  et la formule (125), la dérivée de l'énergie en  $s = 0$ ,  $E'(0)$ , est

$$\begin{aligned} -2 \int_a^A \rho(t)^2 \cdot \langle \text{proj. } \gamma''(t) \text{ sur } T_{\gamma(t)}S, \gamma''(t) \rangle dt &= -2 \int_a^A \rho(t)^2 \|\text{proj. } \gamma''(t) \text{ sur } T_{\gamma(t)}S\|^2 dt \\ &= -2 \int_a^A \rho(t)^2 \cdot \|C_u(t) \cdot \varphi_u(\gamma(t)) + C_v(t) \cdot \varphi_v(\gamma(t))\|^2 dt \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Donc, nous avons construit une variation de  $\gamma$  avec  $E'(0) \neq 0$ . □

Nous allons maintenant montrer que si  $\gamma : (b, B) \rightarrow S$  minimise la longueur des courbes entre deux de ces points  $\gamma(a)$  et  $\gamma(A)$ , alors  $\gamma$  est forcément une géodésique (en  $[a, A]$ ). Les définitions suivantes font partie des outils techniques qui formalisent la dernière affirmation.

**Définition 126.** Une courbe différentiable par parties est une application continue

$$\alpha : [r, R] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

pour laquelle il existe une partition

$$r = r_0 < \dots < r_\mu = R$$

ayant la propriété suivante : la restriction

$$\alpha : [r_k, r_{k+1}] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est différentiable.<sup>9</sup> (Voir Fig. 13)

Comme avant, une courbe différentiable dans  $S$  est une courbe différentiable dans  $\mathbb{R}^3$  dont l'image est contenue dans  $S$ .

Nous dirons que la courbe différentiable par parties  $\alpha$  dans  $S$  joint le point  $p \in S$  au point  $q \in S$  si  $\alpha(r) = p$  et  $\alpha(R) = q$ . L'ensemble des courbes différentiables par parties (toujours dans  $S$ ) qui joignent le point  $p$  au point  $q$  est noté  $\Omega_{p,q}$ .

Si  $\alpha : [r, R] \rightarrow S$  est une courbe de  $\Omega_{p,q}$ , nous définissons sa longueur (entre  $p$  et  $q$ ) comme étant

$$L(\alpha) := \int_r^{r_1} \|\alpha'(\tau)\| d\tau + \dots + \int_{r_{\mu-1}}^R \|\alpha'(\tau)\| d\tau.$$

(Une fois que la restriction de  $\alpha$  à l'intervalle  $[r_i, r_{i+1}]$  est différentiable, la fonction  $\tau \mapsto \|\alpha'(\tau)\|$  est continue et a fortiori intégrable.) Cette définition nous permet aussi de formaliser une notion qui s'impose par l'intuition.

**Définition 127.** La distance entre  $p$  et  $q$  est le nombre réel

$$d_S(p, q) := \inf_{\alpha \in \Omega_{p,q}} L(\alpha).$$

---

9. Nous rappelons ici le concept de différentiabilité sur un intervalle fermé. Soit  $[a, b]$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$  et soit  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction. Nous dirons que  $\alpha$  est de classe  $C^1$  si les deux conditions suivantes sont satisfaites :  
 (i) Les dérivées  $\alpha'(x)$  existent pour chaque  $x \in (a, b)$  ainsi que les dérivées latérales  $\alpha'(a+)$  et  $\alpha'(b-)$ .  
 (ii) La fonction

$$\alpha' : x \mapsto \begin{cases} \alpha'(x), & \text{si } a < x < b \\ \alpha'(a+), & \text{si } x = a \\ \alpha'(b-), & \text{si } x = b \end{cases}$$

est continue.

Une fonction  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite de classe  $C^k$  si elle est de classe  $C^1$  et  $\alpha'$  est de classe  $C^{k-1}$ . La fonction  $\alpha$  est **différentiable** si elle est de classe  $C^k$  pour n'importe quel  $k \geq 1$ .

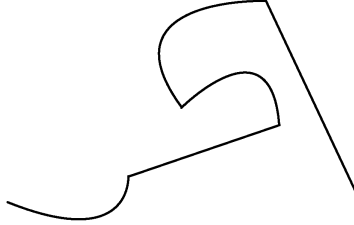


FIGURE 13 – Une courbe différentiable par parties

Il n'est pas très difficile de vérifier que  $d_S$  satisfait

**D1**  $d_S(p, q) = d_S(q, p)$ ;

**D2**  $d_S(p, q) = 0$  si et seulement si  $p = q$ ;

**D3**  $d_S(p, q) \leq d_S(p, r) + d_S(r, q)$ .

Le Théorème 123 a la conséquence suivante.

**Corollaire 128.** Soit  $\gamma : (b, B) \rightarrow S$  une courbe différentiable qui en  $t = a$  passe par  $p$ , en  $t = A$  par  $q$ , et qui satisfait  $|\gamma'(t)| = \text{const.}$  pour chaque  $t \in [a, A]$ . Si  $\gamma$  minimise la fonction  $\mathbf{L} : \Omega_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , c'est à dire,

$$d_S(p, q) = \mathbf{L}(\gamma),$$

alors  $\gamma$  est géodésique en  $[a, A]$ .

*Démonstration.* Nous commençons par remarquer que  $\gamma$  minimise aussi la fonction

$$\mathbf{L}_a^{t_0} : \Omega_{p, \gamma(t_0)} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

qui que ce soit  $t_0 \in (a, A]$ . Autrement, il existe une courbe différentiable par parties  $\alpha \in \Omega_{p, \gamma(t_0)}$  telle que

$$\mathbf{L}_a^{t_0}(\alpha) < \mathbf{L}_a^{t_0}(\gamma);$$

il suit que la concaténation de  $\alpha$  et après  $\gamma|_{[t_0, A]}$  est une courbe différentiable par parties entre  $p$  et  $q$  avec une longueur strictement inférieure à  $\mathbf{L}_a^A(\gamma) = \mathbf{L}(\gamma)$ . Par conséquent, nous pouvons supposer que  $p, q$  sont contenus dans l'image  $U$  d'un paramétrage local  $\varphi$ .

Pour appliquer le Théorème 123, nous devons montrer que  $\gamma$  minimise aussi **E**. L'inégalité de Cauchy–Schwarz nous donne

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\alpha)^2 &= \left( \int_a^A \|\alpha'(t)\| dt \right)^2 \\ &\leq \left( \int_a^A 1 dt \right) \cdot \left( \int_a^A \|\alpha'(t)\|^2 \right) \\ &= (A - a) \cdot \mathbf{E}(\alpha). \end{aligned}$$

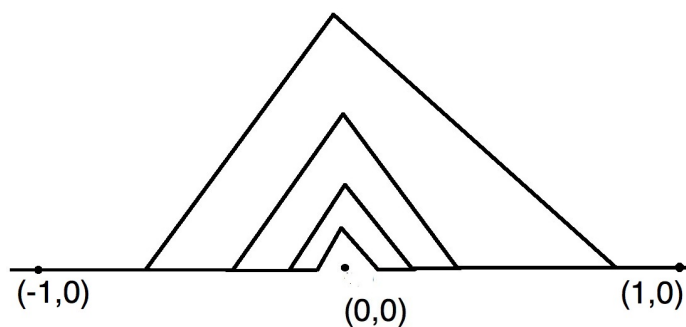


FIGURE 14 –

Et, en plus, l'égalité est achevée si, et seulement si  $|\alpha'|$  est constante. Donc,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\alpha) &\geq \frac{\mathbf{L}(\alpha)^2}{A-a} \\ &\geq \frac{\mathbf{L}(\gamma)^2}{A-a}. \end{aligned}$$

Comme nous avons supposé  $\|\gamma'\|$  constante en  $[a, A]$ , il suit que  $\mathbf{L}(\gamma)^2 = (A-a)\mathbf{E}(\gamma)$ , et nous avons terminé.  $\square$

*Remarques 129.* (i) Comme nos remarques après le Lemme 111 indiquent, l'hypothèse  $\|\gamma'\| \equiv \text{const.}$  dans l'énoncé du Corollaire n'est pas superflue : en effet, si  $\gamma$  minimise la fonction  $\mathbf{L}$ , le même peut être dit de la courbe  $\gamma \circ \rho$ , où  $\rho$  est un difféomorphisme croissant entre un intervalle ouvert et  $(a - \varepsilon, A + \varepsilon) \subseteq (b, B)$ . Le Lemme 111 interdit que  $\gamma \circ \rho$  soit une géodésique si  $\rho'$  est arbitrairement choisie.

(ii) L'énoncé du Corollaire 128 n'est pas le plus général possible, car nous admettons que la courbe minimisante est déjà différentiable. Ceci n'est pas nécessaire, car les courbes minimisantes sont toujours différentiables ! Pour arriver à ce niveau de généralité, il fallait introduire des paramétrages géodésiques et la fonction  $\exp_p : D \subseteq T_p S \rightarrow S$ .

Le Corollaire 128 nous dit qu'une courbe différentiable qui minimise la longueur des courbes différentiables par parties est une géodésique. Dans les lignes à suivre, nous essayons de réveiller l'imagination du lecteur pour bien comprendre ce que le Corollaire peut dire.

*Il n'est pas vrai qu'une courbe minimisante existe toujours :* Les exemples abondent et le plus simple est, peut-être,  $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Comme la droite qui joint  $p = (-1,0)$  à  $q = (1,0)$  n'est pas dans  $S$ , il est possible de trouver une famille de courbes différentiables par parties  $\alpha_n : [0, 1] \rightarrow S$  qui joignent  $p$  à  $q$  telles que

$$\mathbf{L}(\alpha_1) > \mathbf{L}(\alpha_2) > \cdots > \mathbf{L}(\alpha_n) > 2. \quad (\text{voir Fig. 14})$$

*Il n'est pas toujours vrai qu'une géodésique minimise la distance entre les points de son image :* Soient

$$p = (1, 0, 0) \quad \text{et} \quad q = (0, 0, 1)$$

des points sur  $\mathbf{S}$ . L'arc de grand cercle, qui est une géodésique d'après l'Exemple 110,

$$\gamma_1 : \left(-\varepsilon, \frac{3\pi}{2} + \varepsilon\right) \rightarrow \mathbf{S}, \quad t \mapsto (\cos(-t), 0, \sin(-t))$$

passé par  $p$  en  $t = 0$  et par  $q$  en  $t = \frac{3\pi}{2}$ ; sa longueur (entre  $p$  et  $q$ ) est  $\frac{3\pi}{2}$ . Néanmoins, l'arc de grand cercle

$$\gamma_2 : \left(-\varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \rightarrow \mathbf{S}, \quad t \mapsto (\cos(t), 0, \sin(t))$$

passé par  $p$  en  $t = 0$  et par  $q$  en  $t = \frac{\pi}{2}$ ; sa longueur est  $\frac{\pi}{2}$ . Le lecteur pourra se convaincre que  $\gamma_1$  minimise la distance entre  $p$  et les points de la forme  $\gamma_1(t)$ , avec  $t \in [0, -\pi)$ . Il suit qu'il existe des géodésiques qui arrêtent de minimiser la distance à partir d'un certain instant. Le lecteur géométriquement sensible aura remarqué qu'un tel phénomène est lié au fait que la sphère est « suffisamment courbée vers l'intérieur ». Une telle intuition est mathématiquement justifiable à l'aide de la courbure de Gauss ! Pourtant, l'exploration de la dernière affirmation nous coûtera trop, et nous nous contentons de suggérer le chapitre 5 du livre [1].



## 7 Variétés abstraites

### 7.1 Les outils du calcul différentiel

Étant admise une certaine maturité de l'esprit mathématique, le début de la théorie des variétés différentielles est une traduction des résultats du calcul différentiel. En fait, étant donnée la profondeur que nous avons en tête, cette même phrase reste proche de la vérité en remplaçant « calcul différentiel » par « théorème d'inversion locale ». Les définitions sont faites pour atteindre tel immédiatisme. Ceci dit, nous rappelons quelques corollaires clés du théorème d'inversion locale que n'importe quel étudiant sérieux doit connaître.

**Corollaire 130.** « Chaque immersion est localement une inclusion. » Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  une fonction différentiable, et  $a \in U$  un point. Admettons que

$$Df(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \text{ est injective.}$$

Alors il existe un voisinage ouvert  $B_{f(a)} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  de  $f(a)$ , des voisinages ouverts  $V_a \subseteq \mathbb{R}^m$  de  $a$ ,  $W_0 \subseteq \mathbb{R}^n$  de  $0$ , et un difféomorphisme

$$\varphi : V_a \times W_0 \xrightarrow{\sim} B_{f(a)}$$

tels que  $f(x) = \varphi(x, 0)$ .

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\text{inclusion}} & V_a \times W_0 \\ & \searrow f & \downarrow \varphi \\ & & B_{f(a)} \end{array}$$

**Corollaire 131** (Forme locale des submersions). « Chaque submersion est localement une projection. » Soient  $U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction différentiable, et  $(a, b) \in U$  un point. Admettons que

$$Df(a, b) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ est surjective.}$$

Alors il existe des voisinages ouverts  $V_a \subseteq \mathbb{R}^m$  de  $a$ ,  $W_{f(a,b)} \subseteq \mathbb{R}^n$  de  $f(a, b)$ ,  $B_{(a,b)} \subseteq U$  de  $(a, b)$ , et un difféomorphisme

$$\varphi : V_a \times W_{f(a,b)} \xrightarrow{\sim} B_{(a,b)}$$

tels que  $f(\varphi(x, y)) = y$ .

$$\begin{array}{ccc} B_{(a,b)} & \xrightarrow{\varphi} & V_a \times W_{f(a,b)} \\ & \searrow f & \downarrow \text{projection} \\ & & W_{f(a,b)} \end{array}$$

**Corollaire 132** (Théorème des fonctions implicites). Soient  $U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction différentiable, et  $(a, b) \in U$  un point. Admettons que

$$f(a, b) = c, \quad \text{et} \quad Df(a, b) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ est surjective.}$$

Alors il existe un voisinage  $B_{(a,b)}$  de  $(a, b)$ ,  $V_a \subseteq \mathbb{R}^m$  de  $a$ , et une fonction différentiable  $g : V_a \rightarrow \mathbb{R}^n$  tels que  $(x, g(x)) \in B_{(a,b)}$  et  $f(x, g(x)) = c$  pour chaque  $x \in V$ .

## 7.2 Définitions et exemples de base

**Définition 133.** (1) Soit  $M$  un espace topologique et  $U$  un ouvert de  $M$ . Un paramétrage de  $U$  est un homéomorphisme  $\varphi : U_0 \rightarrow U$ , où  $U_0$  est un ouvert d'un espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . L'ouvert  $U$  est dit un ouvert paramétré. Une variété topologique est un espace topologique  $M$  où chaque point possède un voisinage (ouvert) paramétré.

(2) Si  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  et  $\psi : V_0 \rightarrow V$  sont des paramétrages tels que  $U \cap V \neq \emptyset$ , nous appelons

$$\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(U \cap V) \rightarrow \psi^{-1}(U \cap V)$$

le changement de paramétrage.

(3) Un atlas différentiable<sup>10</sup>  $\mathcal{A}$  de dimension  $n$  sur  $M$  est un ensemble de paramétrages

$$\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_{0i} \rightarrow U_i : i \in I\}$$

satisfaisant les deux propriétés suivantes : (a)  $\cup_{i \in I} U_i = M$  et (b) les changements de paramétrage sont toujours des difféomorphismes entre des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ .

(4) Un atlas  $\mathcal{A}$  est dit maximal si  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}' \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A}'$ .

(5) Une variété différentiable de dimension  $n$  est un espace topologique  $M$  muni d'un atlas différentiable maximal de dimension  $n$ . Notation :  $(M, \mathcal{A})$ .

*Remarques 134.* (a) (**Très important.**) La condition (5) ci-dessus est purement technique. Elle existe pour éviter que la théorie soit importunée par des petits problèmes. En effet, si  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  est un paramétrage appartenant à un atlas  $\mathcal{A}$ , rien garantit que le paramétrage obtenu de  $\varphi$  par restriction à un ouvert plus petit de  $U_0$  soit aussi dans  $\mathcal{A}$ . Le lemme suivant est une application facile du Lemme de Zorn.

*Lemme 135.* Soit  $\mathcal{A}$  un atlas différentiable sur l'espace topologique  $M$ . Alors il existe un atlas maximal  $\mathcal{A}^+$  qui contient  $\mathcal{A}$ . Et, en plus, l'atlas différentiable  $\mathcal{A}^+$  est l'unique atlas différentiable avec une telle propriété. □

Les professionnels ne font pas attention au atlas maximal, mais simplement à l'existence d'un atlas différentiable.

(b) Au lieu de considérer des paramétrages, la plupart des mathématiciens parle des « cartes. » Une carte est simplement l'inverse d'un paramétrage, c'est-à-dire, un homéomorphisme  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  entre un ouvert de  $M$  et un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

(c) (Sur la topologie d'une variété.) Deux propriétés qui sont normalement incluses dans la définition d'une variété différentielle sont (1) que l'espace topologique  $M$  soit séparé, et que (2) il existe une base dénombrable pour la topologie de  $M$ . Nous avons choisi de omettre ces deux conditions topologiques dans la définition pour simplifier l'enseignement.

---

10. sous-entendu de classe  $C^\infty$

(d) Dans la définition de variété il n'est pas nécessaire d'inclure que  $M$  soit un espace topologique. En effet, soit  $M$  est un ensemble et soient  $\varphi_i : U_{0i} \rightarrow U_i$  des bijections ayant les propriétés suivantes :

1.  $U_{0i}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .
2.  $\varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$  est un ouvert de  $U_{0i}$  pour chaque  $j$ .
3.  $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$  est un homéomorphisme entre  $\varphi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$  et  $\varphi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$ .
4.  $M = \cup U_i$ .

Alors l'ensemble

$$\mathbf{T} = \{V \text{ sous-ensemble de } M \text{ tel que } \varphi_i^{-1}(V \cap U_i) \text{ est ouvert de } U_{0i} \text{ pour chaque } i\}$$

définit des ouverts d'une topologie sur  $M$ .

*Exemple 136.* Chaque ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  possède un atlas différentiable de dimension  $n$  : ( $\text{id} : U \rightarrow U$ ). Donc chaque ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est une variété différentiable (de dimension  $n$ ).

*Exemple 137.* Soit  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  une surface régulière munie de la topologie induite par  $\mathbb{R}^3$ . Si  $\mathcal{A} = \{\varphi : U_{0i} \rightarrow U_i : i \in I\}$  est un ensemble de paramétrages tel que  $\cup_{i \in I} U_i$ , alors  $\mathcal{A}$  est un atlas différentiable comme nous montre le Corollaire 20. Il suit que  $S$  a une structure de variété différentielle.

*Exemple 138.* Soit

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\};$$

nous donnons à cet ensemble la topologie induite par  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Comme pour  $n = 2$ , nous définissons les deux projections stéréographiques

$$\pi_+ : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

à partir du pôle nord  $N = (0, \dots, 0, 1)$ , et

$$\pi_- : S^n \setminus \{-N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

à partir du pôle sud  $-N$ . Les formules pour  $\pi_{\pm}$  ainsi que pour leurs inverses  $\sigma_{\pm}$  sont tout à fait analogues aux formules en dimension deux :

$$\pi_+(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right), \quad \pi_-(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right);$$

$$\sigma_+(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{1 + |y|^2} (2y_1, \dots, 2y_n, |y|^2 - 1), \quad \sigma_-(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{1 + |y|^2} (2y_1, \dots, 2y_n, 1 - |y|^2).$$

Un calcul direct montre que

$$\pi_- \circ \sigma_+(y) = \frac{y}{|y|^2}, \quad \pi_+ \circ \sigma_-(y) = \frac{y}{|y|^2}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Il suit que  $\pi_+$  et  $\pi_-$  définissent un atlas différentiable  $\mathcal{A}$  sur  $S^n$ . L'espace topologique  $S^n$  avec l'atlas maximal  $\mathcal{A}^+$  engendré par  $\mathcal{A}$  sera appelé « la sphère de dimension  $n$ . »

Exemple 139. Un des avantages du point de vue abstrait c'est de vérifier que certains ensembles qui apparaissent naturellement dans la géométrie sont des variétés différentiables. Soit

$$\mathbb{R}P^n = \{\text{droites de } \mathbb{R}^{n+1} \text{ qui passent par l'origine}\}.$$

Nous allons donner à  $\mathbb{R}P^n$  un atlas différentiable. Traitons d'abord le cas  $n = 1$  et, pour chaque vecteur non-nul  $(x, y)$ , notons  $(x : y)$  l'unique droite qui passe par l'origine et par  $(x, y)$ . D'après la figure 15, à chaque droite  $D$  autre que l'axe  $x$ , nous pouvons associer un point  $p$  sur la droite  $\{y = 1\}$  et réciproquement.

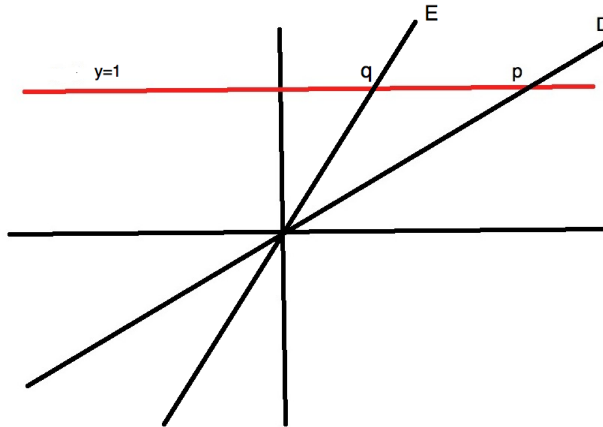


FIGURE 15 – Des droites de  $\mathbb{R}^2$ .

Il est alors naturel de considérer la fonction

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}P^1, \quad u \mapsto (u : 1).$$

Nous vérifions aisément qu'il s'agit d'une bijection entre  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}P^1 \setminus \{\text{l'axe } x\}$ . Le même raisonnement, maintenant avec  $\{x = 1\}$  à la place de  $\{y = 1\}$ , nous mène à considérer la fonction

$$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}P^1, \quad v \mapsto (1 : v).$$

Clairement, n'importe quelle droite de  $\mathbb{R}^2$  (passant par l'origine) est dans la réunion  $\text{Im}(\varphi) \cup \text{Im}(\psi)$ . Puis, il est clair que si  $D$  n'est aucun des axes de  $\mathbb{R}^2$ , alors la coordonnée  $u$  de  $D$  par rapport à  $\varphi$  et la coordonnée  $v$  par rapport à  $\psi$  sont liées par  $v = u^{-1}$ . C'est-à-dire,  $\psi^{-1} \circ \varphi$  est la fonction  $u \mapsto u^{-1}$ .

Maintenant nous traitons le cas de dimension supérieure. (L'étudiant souhaitant un exemple visuel dans le cas  $n = 2$  pourra bénéficier du dessin de Dürer, 16 plus bas.) Pour chaque vecteur  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  non-nul, notons  $(x_0 : \dots : x_n)$  la seule droite qui passe par l'origine et par  $(x_0, \dots, x_n)$ . Il suit que si  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , alors  $(\lambda \cdot x_0 : \dots : \lambda \cdot x_n) = (x_0 : \dots : x_n)$ . Écrivons :

$$U_j = \left\{ \begin{array}{l} \text{droites qui ne sont pas contenues} \\ \text{dans le hyperplan } H_j := \{x_j = 0\} \end{array} \right\}.$$

Chaque droite de  $U_j$  a la forme  $(x_0 : \cdots : x_n)$  avec  $x_j \neq 0$ . Définissons maintenant la *bijection*

$$\varphi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow U_j, \quad (x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : \cdots : x_{j-1} : 1 : x_{j+1} : \cdots : x_n).$$

Soit  $j < k$ . Si  $x = (x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  est tel que  $x_k \neq 0$ , il suit que

$$\begin{aligned} \varphi_k^{-1} \circ \varphi_j(x) &= \varphi_k^{-1}(x_0 : \cdots : x_{j-1} : 1 : x_{j+1} : \cdots : x_n) \\ &= \varphi_k^{-1}\left(\frac{x_0}{x_k} : \cdots : \frac{x_{j-1}}{x_k} : \frac{1}{x_k} : \frac{x_{j+1}}{x_k} : \cdots : \frac{x_n}{x_k}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_k^{-1} \circ \varphi_j(x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = \left(\frac{x_0}{x_k}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_k}, \frac{1}{x_k}, \frac{x_{j+1}}{x_k}, \dots, \frac{x_{k-1}}{x_k}, \frac{x_{k+1}}{x_k}, \dots, \frac{x_n}{x_k}\right),$$

qui est différentiable sur l'ouvert  $\{x_k \neq 0\}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Un raisonnement similaire montre que  $\varphi_k^{-1} \circ \varphi_j$  est aussi différentiable si  $j \geq k$ . Il suit que  $\mathbb{R}P^n$  possède une structure de variété différentielle. Plus précisément, nous munissons  $\mathbb{R}P^n$  de la topologie suivante :  $V \subseteq \mathbb{R}P^n$  est ouvert  $\Leftrightarrow \varphi_j^{-1}(V \cap U_j)$  est ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Voir la remarque 134(d) pour plus de détails. La variété  $\mathbb{R}P^n$  s'appelle l'espace projectif réel de dimension  $n$ . Il n'est pas très difficile de se convaincre que la projection naturelle  $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ ,  $(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : \cdots : x_n)$  est continue et surjective, ce qui montre que  $\mathbb{R}P^n$  est compacte. Il est très important de comprendre les variétés  $\mathbb{R}P^n$  comme étant des « compactifications » de  $\mathbb{R}^n$ . En effet, nous savons que  $\varphi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow U_0$  est un homéomorphisme et, en plus,  $\mathbb{R}P^n \setminus U_0$  est un ensemble fermé dont l'intérieur est vide.

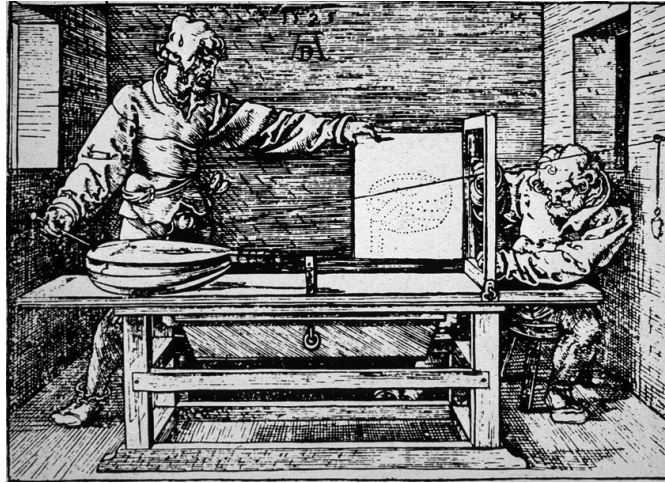


FIGURE 16 – A. Dürer, Dessin à la fin de Underweysung der Messung, Nürnberg 1525

L'importance de  $\mathbb{R}P^n$  (et ses variantes) est extrême dans la géométrie. Ils sont des « compactifications » naturelles des espaces euclidiens car ils possèdent la remarquable propriété de donner un sens précis à l'idée géométrique « qui va vers l'infini ». Plus précisément, prenons  $\ell_0 = (x_1 = 0)$  et  $\ell_1 = (x_1 = 1)$  des droites parallèles dans  $\mathbb{R}^2$  avec coordonnées  $x_1, x_2$ . À l'aide de  $\varphi_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ , les droites  $\ell_0$  et  $\ell_1$  sont maintenant les sous-ensembles  $L_0 = \varphi_0(\ell_0) = \{(1 : 0 : t) \in \mathbb{R}P^2 : t \in \mathbb{R}\}$

et  $L_1 = \varphi_1(\ell_1) = \{(1 : 1 : t) \in \mathbb{R}P^2 : t \in \mathbb{R}\}$ . Clairement,  $L_0 \cap L_1$  est encore vide, mais la clôture de  $L_0$  dans  $\mathbb{R}P^2$ ,

$$\bar{L}_0 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{R}P^2 : x_1 = 0\}$$

et la clôture de  $L_1$

$$\bar{L}_1 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{R}P^2 : x_1 = x_0\}$$

se coupent en  $(0 : 0 : 1)$ . Le lecteur qui veut présenter ses respects aux personnes qui ont commencé, d'une façon très subtile, toute cette histoire, devra consulter le chapitre III de [4].

*Exemple 140.* Soit  $n \geq 3$ . Nous allons généraliser l'Exemple 139. Soit

$$G(2, n) = \{\text{ensemble des plans de } \mathbb{R}^{n+1} \text{ qui passent par l'origine}\}.$$

À chaque matrice  $(n+1) \times 2$

$$X = (\vec{x} \quad \vec{y}) = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$$

dont les colonnes sont l.i., nous pouvons associer le plan  $[X] \in G(2, n)$  engendré par les colonnes. Il n'est pas très difficile de se convaincre que l'ensemble des matrices dont les colonnes sont l.i. forme un ouvert  $\Omega(2, n)$  dans l'espace Euclidien  $\text{Mat}_{(n+1) \times 2}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2(n+1)}$  : c'est le complémentaire du fermé

$$\bigcap_{i < j} \left\{ X \in \text{Mat}_{(n+1) \times 2}(\mathbb{R}) : \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Comme dans le cas de  $\mathbb{R}P^n$ , où nous avons travaillé avec les matrices  $(n+1) \times 1$ , nous pouvons considérer, les ensembles

$$\Omega_{ij} = \left\{ X \in \text{Mat}_{(n+1) \times 2}(\mathbb{R}) : \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} \neq 0 \right\}, \quad i < j,$$

et

$$U_{ij} = \{[X] \in G(2, n) : X \in \Omega_{ij}\}, \quad i < j.$$

Il est clair que  $\cup_{i < j} U_{ij} = G(2, n)$ . Il est aussi clair que une même matrice  $X \in \Omega_{ij}$  peut déterminer le même plan de  $\mathbb{R}^{n+1}$  : si  $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  est une matrice  $2 \times 2$  qui est inversible, alors

$$(\alpha \cdot \vec{x} + \gamma \cdot \vec{y} \quad \beta \cdot \vec{x} + \delta \cdot \vec{y}) = X \cdot g,$$

et donc  $[X] = [X \cdot g]$ . En plus, si  $[X] = [X']$ , nous pouvons trouver une unique matrice inversible  $2 \times 2$  telle que  $X' = X \cdot g$ .

Par conséquent, chaque plan  $P \in U_{ij}$  est égal à  $[X]$ , où  $X$  est telle que

$$\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Plus précisément, si  $P$  est un plan engendré par les colonnes de  $X = (\vec{x} \quad \vec{y}) \in \Omega_{ij}$  et

$$g = \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix}^{-1}$$

alors  $X \cdot g$  a la forme voulue. Ainsi, l'application évidente

$$\varphi_{ij} : \text{Mat}_{(n-1) \times 2}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2n-2} \rightarrow U_{ij},$$

définit une bijection entre  $\mathbb{R}^{2n-2}$  et  $U_{ij}$ . Le lecteur pourra vérifier que les  $\varphi_{ij}$  donnent à  $G(2, n)$  une structure de variété différentielle de dimension  $2n - 2$ . En plus, comme chaque plan  $P \in G(2, n)$  peut être engendré par les deux premiers vecteurs d'une base orthonormale de  $\mathbb{R}^{n+1}$ —il suffit de trouver une base orthonormale de  $P$  et après compléter—, il suit que

$$O(n+1, \mathbb{R}) \rightarrow G(2, n), \quad g \mapsto \text{plan engendré par les deux premières colonnes de } g$$

est surjective (et continue) et donc  $G(2, n)$  est compacte. Les variétés  $G(2, n)$  sont des cas particulières des variétés de Grassmann  $G(k, n)$  qui sont des variétés de  $k$ -hyperplans dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

### 7.3 Les applications différentiables

Les définitions dans le cas des variétés abstraites sont exactement les mêmes que dans le cas de surfaces régulières (voir Définition 26).

**Définition 141.** Soient  $(M, \mathcal{A})$  et  $(N, \mathcal{B})$  des variétés de différentielles de dimension  $m$  et  $n$  respectivement. Une fonction  $f : M \rightarrow N$  est différentiable si, pour chaque point  $p \in M$ , il existe des ouverts paramétrés  $\varphi : U_0 \rightarrow U \subseteq M$  et  $\psi : V_0 \rightarrow V \subseteq N$  tels que

- a)  $p \in U$ ,
- b)  $f(U) \subseteq V$  et,
- c)  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U_0 \rightarrow V_0$  est différentiable.

La fonction entre deux ouverts  $U_0 \rightarrow V_0$  est appelée l'expression locale de  $f$  par rapport aux paramétrages  $\varphi$  et  $\psi$ .

Dans la définition 141 nous avons supposé qu'il existe un couple de paramétrages  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  et  $\psi : V_0 \rightarrow V$  tels que l'expression locale de  $f$  soit différentiable. La définition d'un atlas garantit que le même peut être dit de n'importe quel autre couple  $\psi, \psi'$  de paramétrages locaux et la justification est la même que celle trouvée dans §3.2.

**Définition 142.** Un difféomorphisme  $f : M \rightarrow N$  est une bijection différentiable dont l'inverse est aussi différentiable. Une application différentiable  $f : M \rightarrow N$  est un difféomorphisme local si, chaque point  $p \in M$  possède un voisinage  $U$  tel que  $f|_U$  induit un difféomorphisme entre  $U$  et un ouvert de  $N$ .

## 7.4 Les vecteurs tangents

Dans la théorie des surface régulières, nous avons vu que l'espace tangent à une telle surface  $S$  en  $p$  est le sous-espace de  $\mathbb{R}^3$  engendré par la l'image de la dérivée  $D\varphi(\varphi^{-1}(p)) \cdot \mathbb{R}^2$ , où  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  est un paramétrage d'un voisinage de  $p$ . Par conséquent, un vecteur tangent  $\xi \in T_p S$  a toujours la forme  $\xi = D\varphi(\varphi^{-1}(p)) \cdot \vec{v}$ ,  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ . Pour fixer les idées, nous allons dire que  $(\varphi, \vec{v})$  est une expression de  $\xi$ . La règle de la chaîne nous garantit que si  $(\psi, \vec{w})$  est une autre expression de  $\xi$ , alors

$$\vec{w} = D(\psi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) \cdot \vec{v}.$$

Cela induit une relation d'équivalence sur les couples formés d'un paramétrage d'un voisinage de  $p$  et un vecteur de  $\mathbb{R}^2$  :  $(\varphi, \vec{v}) \sim_p (\psi, \vec{w}) \Leftrightarrow D\varphi(\varphi^{-1}(p)) \cdot \vec{v} = D\psi(\psi^{-1}(p)) \cdot \vec{w}$ . La définition suivante s'impose naturellement.

**Définition 143.** Soit  $(M, \mathcal{A})$  une variété différentielle de dimension  $n$  et  $p \in M$ . Considérons l'ensemble  $\mathcal{S}(p)$  des couples  $(\varphi : U_0 \rightarrow U, \vec{v}) \in \mathcal{A} \times \mathbb{R}^n$  tels que  $p \in U$ . Nous dirons que

$$(\varphi, \vec{v}) \sim_p (\psi, \vec{w}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{w} = D(\psi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) \cdot \vec{v}.$$

Le lecteur vérifiera sans problème que « $\sim_p$ » est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence d'un couple  $(\varphi, \vec{v}) \in \mathcal{S}(p)$  est notée  $[\varphi, \vec{v}]_p$ , ou simplement  $[\varphi, \vec{v}]$ . Une classe d'équivalence est appelée un vecteur tangent à  $p$ . L'ensemble des vecteurs tangents à  $p$  sera noté  $T_p M$ .

*Remarques 144.* La définition ici est la même que dans [3]. Une autre définition très répandue dans la littérature fait appel aux dérivations.

**Lemme 145.** Soit  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  un paramétrage d'un voisinage ouvert  $U$  de  $p \in M$ .

(a) L'application

$$\Delta\varphi : \vec{v} \in \mathbb{R}^n \mapsto [\varphi, \vec{v}]_p$$

définit une bijection entre  $\mathbb{R}^n$  et  $T_p M$ .

(b) Si  $\psi : V_0 \rightarrow V$  est un autre paramétrage d'un voisinage de  $V$  de  $p$ , alors

$$(\Delta\varphi)^{-1} \circ \Delta\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est l'application linéaire définie par la matrice Jacobienne du difféomorphisme  $\varphi^{-1} \circ \psi$  en  $\psi^{-1}(p)$ . En particulier, c'est un isomorphisme linéaire.

(c) L'ensemble  $T_p M$  possède une structure de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel telle que pour chaque paramétrage comme  $\varphi$ ,  $\Delta\varphi : \vec{v} \mapsto [\varphi, \vec{v}]_p$  est un isomorphisme linéaire.

*Démonstration.* (a) Soit  $[\psi, \vec{w}]$  un vecteur tangent à  $p$ , où  $\psi : V_0 \rightarrow V$  est un paramétrage d'un voisinage de  $p$ . Comme  $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(U \cap V) \rightarrow \psi^{-1}(U \cap V)$  est un difféomorphisme, il existe un unique  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$D(\psi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) \cdot \vec{v} = \vec{w}.$$



Plus précisément, la règle de la chaîne nous permet d'en déduire que

$$\vec{w} = D(\psi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) \cdot (D(\varphi^{-1} \circ \psi)(\psi^{-1}(p)) \cdot w),$$

ce qui implique que

$$[\psi, \vec{w}] = [\varphi, D(\varphi^{-1} \circ \psi)(\psi^{-1}(p)) \cdot \vec{w}]. \quad (146)$$

Nous avons prouvé que  $\Delta\varphi$  est surjective. Que  $\Delta\varphi$  est injective est facile et nous laissons les détails à la charge du lecteur.

(b) D'après l'équation (146), nous savons que

$$\Delta\varphi(D(\varphi^{-1} \circ \psi)(\psi^{-1}(p)) \cdot \vec{w}) = \Delta\psi(\vec{w}).$$

Étant donné que  $\Delta\varphi$  est une bijection, nous obtenons que

$$(\Delta\varphi)^{-1} \circ \Delta\psi(\vec{w}) = D(\varphi^{-1} \circ \psi)(\psi^{-1}(p)) \cdot \vec{w}.$$

(c) Soient  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  et  $\xi := [\varphi, \vec{v}]$ ,  $\zeta := [\varphi, \vec{w}]$  des vecteurs tangents. Nous définissons

$$\lambda \cdot \xi + \mu \cdot \zeta := [\varphi, \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}].$$

Compte tenu de (a) et (b), cette formule définit une structure de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel sur  $T_pM$  qui est indépendante du choix du paramétrage  $\varphi$ .  $\square$

Pour faire des calculs, les abréviations

$$\partial_j(p) = \partial_j\varphi(p) = [\varphi; e_j]_p \quad (147)$$

sont fort commodes.

## 7.5 La dérivée

Soit  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable entre deux variétés différentiables. Soient  $p \in M$  et  $q$  son image dans  $N$ .

**Proposition 148.** *Soient*

$$\begin{array}{ll} \varphi : U_0 \rightarrow U \subseteq M & \psi : V_0 \rightarrow V \subseteq N \\ \varphi' : U'_0 \rightarrow U' \subseteq M & \psi' : V'_0 \rightarrow V' \subseteq N \end{array}$$

*des paramétrages des voisinages  $U, U'$  de  $p$  et  $V, V'$  de  $q$ . Admettons que  $f(U) \subseteq V$  et  $f(U') \subseteq V'$ . Notons  $F$ , respectivement  $F'$ , l'expression locale de  $f$  par rapport à  $\varphi$  et  $\psi$ , respectivement  $\varphi'$  et  $\psi'$ . Posons  $p_0 = \varphi^{-1}p$  et  $p'_0 = \varphi'^{-1}p$ . Alors, si  $\xi = [\varphi; a]_p = [\varphi', a']_p \in T_pM$ , l'égalité*

$$[\psi; DF(p_0) \cdot a]_q = [\psi'; DF'(p'_0) \cdot a']_q$$

*est vérifiée.*

*Démonstration.* Posons  $q_0 = \psi^{-1}q$  et  $q'_0 = \psi'^{-1}q$ . L'égalité  $[\varphi; a]_p = [\varphi'; a']_p$  nous dit que

$$a' = D(\varphi'^{-1} \circ \varphi)(p_0) \cdot a \quad (*)$$

Par définition, prouver que  $[\psi; DF(p_0) \cdot a]_q = [\psi'; DF'(p'_0) \cdot a']_q$  équivaut à vérifier

$$DF'(p'_0) \cdot a' = D(\psi'^{-1} \circ \psi)(q_0) \cdot \{DF(p_0) \cdot a\},$$

qui, à l'aide de (\*) est une conséquence directe de la règle de la chaîne appliquée à

$$\underbrace{(\psi'^{-1} \circ f \circ \varphi')}_{F'} \circ (\varphi'^{-1} \circ \varphi) = (\psi'^{-1} \circ \psi) \circ \underbrace{(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)}_F.$$

□

Cette proposition nous permet de faire la définition suivante.

**Définition 149.** Soient  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable entre variétés différentielles,  $p$  un point de  $M$ ,  $q$  son image dans  $N$ ,  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  un paramétrage d'un voisinage  $U$  de  $p$ , et  $\psi : V_0 \rightarrow V$  un paramétrage d'un voisinage  $V$  de  $q$ . Supposons que  $f(U) \subseteq V$ . Alors la dérivée de  $f$  en  $p$  est l'application linéaire qui à chaque  $[\varphi; a]_p \in T_pM$  associe le vecteur tangent  $[\psi; DF(\varphi^{-1}p) \cdot a]_q$ , où  $F$  est l'expression locale de  $f$  par rapport aux paramétrages  $\varphi$  et  $\psi$ .

Le corollaire suivant résulte de la définition.

**Corollaire 150.** Soient

$$\Phi = \{\partial_1\varphi(p), \dots, \partial_m\varphi(p)\} \quad \text{et} \quad \Psi = \{\partial_1\psi(q), \dots, \partial_n\psi(q)\}$$

des bases de  $T_pM$  et  $T_qN$ . Alors la matrice de  $Df(p)$  par rapport à  $\Phi$  et  $\Psi$  est la Jacobienne de l'expression locale de  $f$  en  $\varphi^{-1}(p)$ .

## 7.6 Les sous-variétés

Soit  $(M, \mathcal{A})$  une variété différentielle de dimension  $n$  et  $\mathcal{A}$  l'atlas maximal.

**Définition 151.** Un sous-ensemble  $S \subseteq M$  est une sous-variété de dimension  $s$  si pour chaque  $p \in S$  il existe  $\varphi : U_0 \rightarrow U \in \mathcal{A}$  tel que

1.  $p \in U$ ;
2.  $S \cap U = \varphi \left( U_0 \cap \mathbb{R}^s \times \underbrace{\{0\} \times \dots \times \{0\}}_{n-s} \right)$ .

Un paramétrage comme  $\varphi$  est appelé une *rectification locale* de  $S$ .

**Proposition 152.** Soit  $S$  une sous-variété de dimension  $s$  de  $M$ . Munissons  $S$  de la topologie induite et considérons l'ensemble  $\mathcal{A}(S)$  des paramétrages  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  de  $\mathcal{A}$  qui sont des rectifications locales de  $S$ . Pour chaque  $\varphi \in \mathcal{A}(S)$ , soient  $U_{0,S} = U_0 \cap (\mathbb{R}^s \times \{0\})$  – que nous regardons comme un ouvert de  $\mathbb{R}^s$  – et  $\varphi_S$  la restriction de  $\varphi$  à  $U_{0,S}$ . Alors

$$\mathcal{A}_S = \{\varphi_S : U_{0,S} \rightarrow U \cap S : \varphi \in \mathcal{A}(S)\}$$

est un atlas différentiable de dimension  $s$ . L'inclusion  $i : (S, \mathcal{A}_S) \rightarrow (M, \mathcal{A})$  est différentiable.

*Démonstration.* Par définition, chaque point de  $S$  appartient à l'image d'un paramétrage  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  de  $\mathcal{A}(S)$ . Pour montrer que  $\mathcal{A}_S$  est un atlas différentiable, il suffit de prouver que

1. pour chaque  $\varphi \in \mathcal{A}(S)$ ,  $\varphi_S : U_{0,S} \rightarrow U \cap S$  est un homéomorphisme, et
2. pour chaque couple  $\varphi : U_0 \rightarrow U, \psi : V_0 \rightarrow V$  de  $\mathcal{A}(S)$ , le changement

$$\psi_S^{-1} \circ \varphi_S : \varphi_S^{-1}(U \cap V \cap S) \rightarrow \psi_S^{-1}(U \cap V \cap S)$$

est un difféomorphisme.

Prouvons (1). Comme  $\varphi_S$  est bijective et continue, une condition nécessaire et suffisante pour que  $\varphi_S$  soit un homéomorphisme est que  $\varphi_S$  soit une application ouverte. Prenons alors  $G$  un ouvert de  $U_{0,S}$ ; par définition  $G = \tilde{G} \cap (\mathbb{R}^s \times \{0\})$ , où  $\tilde{G}$  est un ouvert de  $U_0$ . Il suit que

$$\begin{aligned} \varphi_S(G) &= \varphi_S(\tilde{G} \cap (\mathbb{R}^s \times \{0\})) \\ &= \varphi(\tilde{G} \cap (\mathbb{R}^s \times \{0\})) \\ &= \varphi(G) \cap \varphi(\mathbb{R}^s \times \{0\}) \\ &= \varphi(G) \cap S. \end{aligned}$$

Étant donné que  $\varphi(G)$  est un ouvert de  $U$ , il suit que  $\varphi_S$  est une application ouverte. Prouvons (2). Soit  $p \in U \cap V \cap S$ . Par définition, il existe un unique  $(x, 0) \in U_{0,S}$  tel que  $\varphi(x, 0) = p$ , et un  $(y, 0) \in V_{0,S}$  tel que  $\psi(y, 0) = p$ . A fortiori,  $\psi_S(y, 0) = p$  et  $\varphi_S(x, 0) = p$ . Donc  $\psi_S^{-1}(\varphi_S(x, 0)) = \psi^{-1} \circ \varphi(x, 0)$ . Cela prouve que  $\psi_S^{-1} \circ \varphi_S$  est simplement la restriction de  $\psi^{-1} \circ \varphi$  à  $\varphi_S^{-1}(U \cap V \cap S) = \varphi_S^{-1}(U \cap V \cap S)$ , qui est une fonction différentiable.  $\square$

*Exemple 153.* Soit  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  une surface régulière. Nous avons vu que étant donné un point  $p \in S$ , il existe un ouvert  $W \subseteq \mathbb{R}^2$  et une fonction différentiable  $h : W \rightarrow \mathbb{R}$  tels que, après une permutation convenable des coordonnées de  $\mathbb{R}^3$ ,

$$S \cap (W \times \mathbb{R}) = \{(x, y, z) \in W \times \mathbb{R} : z = h(x, y)\}.$$

Posons

$$\varphi : W \times \mathbb{R} \rightarrow W \times \mathbb{R}, \quad \varphi(x, y, z) = (x, y, h(x, y) - z).$$

Il suit que  $\varphi(W \times \{0\}) = S \cap (W \times \mathbb{R})$ . En plus, comme

$$\varphi^{-1} : W \times \mathbb{R} \rightarrow W \times \mathbb{R}, \quad (\xi, \eta, \zeta) \mapsto (\xi, \eta, h(\xi, \eta) - \zeta),$$

il suit que  $\varphi$  est un difféomorphisme, et a fortiori, un paramétrage de  $W \times \mathbb{R}$ . Par conséquent, c'est une rectification locale de  $S$ .

## 7.7 Le théorème d'inversion locale et ses conséquences

Une conséquence immédiate du théorème d'inversion locale (Théorème 2) et du Corollaire 150 est le théorème suivant.

**Théorème 154** (d'inversion locale). *Soit  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable entre deux variétés différentielles de même dimension. Soit  $p \in M$  tel que  $Df(p) : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  est un isomorphisme linéaire. Alors il existe  $U$  un voisinage de  $p$  et  $V$  un voisinage de  $q$  tels que  $f|_U : U \rightarrow V$  est un difféomorphisme.*  $\square$

**Définition 155.** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable et  $p$  un point de  $M$ . Nous dirons que  $f$  est une immersion (respectivement une submersion) en  $p$  si  $Df(p) : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  est injective (respectivement surjective). Nous dirons que  $f$  est une immersion (respectivement une submersion) si  $f$  est une immersion (respectivement submersion) en chaque  $p \in M$ .

**Théorème 156** (La forme locale des immersions). *Soit  $f : M \rightarrow N$  une immersion en  $p \in M$  (donc  $\dim M \leq \dim N$ ). Alors il existe des paramétrages  $\varphi : U_0 \rightarrow U$  d'un voisinage de  $p$  et  $\psi : V_0 \rightarrow V$  d'un voisinage de  $f(p)$  tels que*

1.  $f(U) \subseteq V$ , et
2.  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi(x) = (x, 0)$ .

*Démonstration.* C'est un exercice facile à l'aide du Corollaire 130.  $\square$

**Théorème 157** (La forme locale des submersions). *Soit  $f : M \rightarrow N$  une submersion en  $p \in M$  (donc  $\dim M \geq \dim N$ ). Alors il existe des ouverts  $V_0$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $C_0$  de  $\mathbb{R}^{m-n}$ , des paramétrages  $\varphi : V_0 \times C_0 \rightarrow U$  d'un voisinage de  $p$  et  $\psi : V_0 \rightarrow V$  d'un voisinage de  $f(p)$  tels que*

1.  $f(U) \subseteq V$ , et
2.  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi(x, y) = x$  ( $x \in \mathbb{R}^n$  et  $y \in \mathbb{R}^{m-n}$ ).

*Démonstration.* C'est un exercice facile à l'aide du Corollaire 131.  $\square$

**Corollaire 158.** *Soit  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable entre des variétés de dimension  $m$  et  $n$  respectivement. Soit  $q \in N$  tel que pour chaque  $p \in f^{-1}(q)$ ,  $f$  soit une submersion en  $p$ . Alors l'ensemble  $f^{-1}(q)$  est une sous-variété de  $M$  de dimension  $m - n$ . Pour chaque  $p \in f^{-1}(q)$ , l'espace tangent à  $f^{-1}(q)$  en  $p$  est le noyau de la dérivée  $Df(p) : T_pM \rightarrow T_qN$ .*

*Démonstration.* D'après le Théorème 157, il existe des paramétrages  $\psi : V_0 \rightarrow V$  d'un voisinage de  $q$ , et  $\varphi : V_0 \times C_0 \rightarrow U$  d'un voisinage de  $p$  tels que

1.  $f(U) \subseteq V$ , et
2.  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi(x, y) = x$ , pour chaque  $x \in V_0$ .

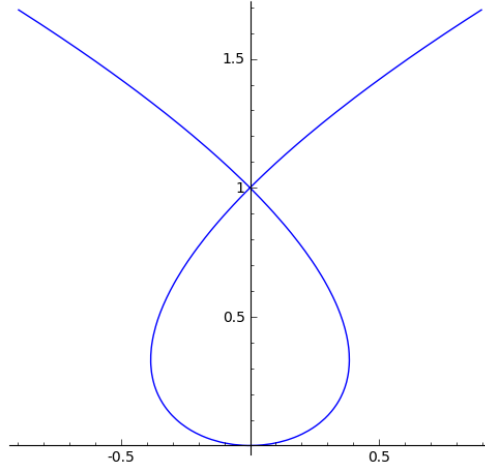


FIGURE 17 – Les valeurs de la fonction  $t \mapsto (t^3 - t, t^2)$  pour  $t \in \mathbb{R}$ .

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \varphi(x, y) \in f^{-1}(q) &\Leftrightarrow f(\varphi(x, y)) = q \\
 &\Leftrightarrow \psi^{-1} \circ f \circ \varphi(x, y) = \psi^{-1}(q) \\
 &\Leftrightarrow x = \psi^{-1}(q).
 \end{aligned}
 \tag{159}$$

Il suit que  $f^{-1}(q) \cap U$  est l'image de  $\{\psi^{-1}(q)\} \times C_0$  par  $\varphi$  et donc c'est une sous-variété.  $\square$

Le langage suivant permet d'évoquer le Corollaire 158 de façon très simple. Soit  $f : M \rightarrow N$  différentiable. Un point  $q \in N$  est une **valeur critique** s'il existe un  $p \in f^{-1}(q)$  tel que  $Df(p) : T_pM \rightarrow T_qN$  n'est pas surjective. Un point  $q \in N$  qui n'est pas une valeur critique est une **valeur régulière**<sup>11</sup>. Le Corollaire 158 dit que l'image réciproque d'une valeur régulière est une sous-variété.

## 7.8 Les plongements

Imaginons que nous disposons d'une immersion *injective*  $f : M \rightarrow N$ . Dans un cours de théorie des ensembles, nous aurions le droit d'identifier  $M$  et son image  $f(M)$ . Mais, en topologie (et par conséquent dans la géométrie différentielle), nous ne pouvons pas faire une telle identification car la topologie de  $f(M)$  (induite par  $N$ ) n'est pas forcément la même que celle de  $M$ . Dans le cas où une telle coïncidence se produit, nous avons un nom à donner.

**Définition 160.** Une immersion  $f : M \rightarrow N$  est un plongement si  $f : M \rightarrow f(M)$  est un homéomorphisme.

La définition englobe deux propriétés additionnelles importantes de l'immersion  $f$  : (a) l'*injectivité* de  $f$  et (b) le fait que la topologie de  $f(M)$  induite par  $N$  soit la même que la topologie *intrinsèque* de  $M$ .

11. Par définition, si  $f^{-1}(q) = \emptyset$ , alors  $q$  est une valeur régulière.

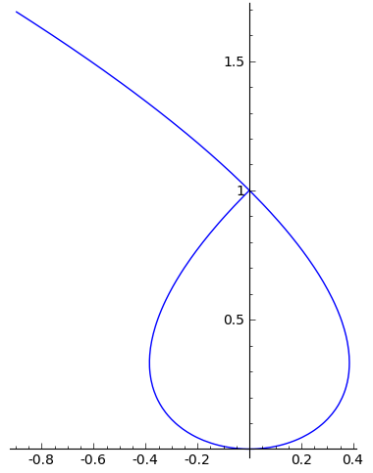


FIGURE 18 – Les valeurs de la fonction  $t \mapsto (t^3 - t, t^2)$  pour  $t < 1$ .

*Exemple 161.* Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la fonction  $t \mapsto (t^3 - t, t^2)$ . L'image de  $f$  est esquissée dans la figure 17. Il est très facile de vérifier que  $f$  est une immersion. Cependant,  $f$  n'est pas injective, donc  $f$  ne peut pas être un plongement. Prenons maintenant la restriction de  $f$  à  $I = (-\infty, 1)$ . (Voir figure 18). Elle est clairement injective, mais elle n'est pas encore un plongement ! Le problème se passe au niveau topologique :  $f(I)$  ne possède pas la même structure topologique que  $I$ . En effet, chaque boule ouverte  $B$  centrée en  $f(-1)$  possède un point ayant la forme  $f(1 - 1/n)$ .

**Théorème 162.** Soit  $f : M \rightarrow N$  un plongement. Alors  $f(M)$  est une sous-variété de  $N$  et  $f : M \rightarrow f(M)$  est un difféomorphisme.

*Démonstration.* Soit  $p \in M$ . D'après le Théorème 156, nous pouvons trouver des paramétrages  $\varphi : U_0 \rightarrow U \subseteq M$  et  $\psi : V_0 \rightarrow V \subseteq N$  tels que (1)  $f(U) \subseteq V$  et (2)  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi(x) = (x, 0)$ . Il suit que  $f(U) \cap V = \psi(U_0 \times \{0\})$ . Étant donné que  $f(U)$  est un ouvert de  $f(M)$ , il existe un ouvert  $G$  de  $N$  tel que  $f(U) = f(M) \cap G$ . Soit  $V' = G \cap V$ , et  $\psi' : V'_0 \rightarrow V'$  la restriction de  $\psi$  à  $\psi^{-1}(V')$ . Il suit que  $f(U) \subseteq V'$ , que  $f(U) \cap V' = f(M) \cap V'$  et, par conséquent,  $f(M) \cap V' = \psi'(U'_0 \times \{0\})$ , où  $U'_0$  est l'intersection de  $V'_0$  avec  $U_0 \times \{0\}$ . Donc  $f(M)$  est une sous-variété de  $N$ .  $\square$

## Références

- [1] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- [2] A. Gramain, *Cours de initiation à la topologie algébrique et différentielle*.  
Disponible sur : <http://www.math.u-psud.fr/~biblio/numerisation/>.
- [3] M. W. Hirsch, *Differential Topology*. Springer Graduate Texts in Mathematics.
- [4] P. Thuillier, *D'Archimède à Einstein*. LGF – Livre de Poche (1996).

- [5] E. C. Zeeman, *An introduction to topology : The classification theorem for surfaces*.  
Disponible sur : <http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/surgery/zeeman.pdf>