Faculté de Sciences
Groupes et Anneaux 2
Janvier–Mai 2022.

Devoir surveillé n° 1

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– Le devoir a un total de 24 points. Les notes $\geqslant 20$ seront considérées comme 20.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations irresponsables vous font perdre la confiance du correcteur : Il faut les éviter à tout prix.
– La bonne compréhension et interprétation des questions fait partie du devoir.
– Le barème est donné à titre indicatif.

Convention. Dans la suite, G désigne un groupe.

Exercice 1 (Question de cours)**.** (5 pts) Soit X un G-ensemble n'ayant qu'une seule orbite. Montrer qu'il existe un sous-groupe H de G, que l'on spécifiera, et une bijection entre G-ensembles $G/H \to X$.

Exercice 2. (9 pts)

1) Soit $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$. En déterminant une action de G sur un ensemble, montrer que $G \simeq \mathscr{S}_3$.

   Correction. On laisse P être le sous-ensemble des droites vectorielles de $\mathbf{F}_2^2$ qui passent par l'origine. Clairement, $P = \{\mathbf{F}_2\vec{e}_1, \mathbf{F}_2\vec{e}_2, \mathbf{F}_2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)\} = \{1, 2, 3\}$. On obtient une action de G sur P et un morphisme $T : G \to \mathscr{S}_3$. Or, G est un groupe avec $(4-1)\cdot(4-2) = 6$ éléments. Clairement, $T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (23)$ et $T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (123)$. Donc l'image de T possède plsu de 3 éléments $\Rightarrow$ elle doit être $\mathscr{S}_3$. $\square$

2) Soit maintenant $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_3)$ et soit $H = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbf{F}_3^* \right\}$ le sous-groupe distingué des homothéties. En déterminant une action de G sur un ensemble, montrer que $G/H \simeq \mathscr{S}_4$

   Correction. Ensuite, on prendra P les droites vectorielles de $\mathbf{F}_3^2$. Il est facile de les compter : on a $\{\mathbf{F}_3\vec{e}_1, \mathbf{F}_3\vec{e}_2, \mathbf{F}_3(\vec{e}_1 + \vec{e}_2), \mathbf{F}_3(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2)\}$. Ceci donne un $T : G \to \mathscr{S}_4$. Clairement, $H \subset \operatorname{Ker} T$. En fait, si $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ fixe $\mathbf{F}_3\vec{e}_1$ et $\mathbf{F}_3\vec{e}_2$, alors $x = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$, et une telle matrice ne peut pas fixer $\mathbf{F}_3(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$, sauf quand $\lambda = \mu$. Donc $\ker T = H$ et $G/H \simeq \mathrm{Im}$. Or, l'image possède 24 éléments. $\square$

Exercice 3. (10pts) On suppose G fini. Soit $H < G$ un sous-groupe et $T : G \to \mathrm{Bij}(G/H)$ le morphisme associé à l'action de G sur G/H. Le *coeur* de H, désigné par $\mathscr{C}_H$ dans la suite, est le sous-groupe $\mathrm{Ker}\, T$.

1) (3 pts) Montrer que si $N \lhd G$ est contenu dans H, alors $N \subset \mathscr{C}_H$.

   Correction. En effet, si $n \in N$ et $gH \in G/H$, on voit que $n * gH = gg^{-1}ngH = gn'H = gH$. Donc $N \subset \mathrm{Ker}\, T$. $\square$

2) (3 pts) Exprimer $\mathscr{C}_H$ en fonction des conjugués $\{{}^gH \,:\, g \in G\}$.

   Correction. On sait que $\mathrm{St}_{eH} = H$ et que $\mathrm{St}_{gH} = {}^g\mathrm{St}_{eH} = {}^gH$. Donc, $x \in \mathscr{C}_H$ si et seulement si $x \in \bigcap_g {}^gH$. Donc $\ker = \bigcap_g {}^gH$. $\square$

3) (4 pts) Soit p le plus petit premier qui divise $|G|$. Montrer que si $p = [G : H]$, alors $H \lhd G$. (Indication : L'entier $p!$ s'écrit comme $p \times m$, où $\mathrm{pgcd}(p, m) = 1$.)

   Correction. Soit $T : G \to \mathscr{S}_p$. On sait que $G/\ker T$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathscr{S}_p$. Donc $[G : \mathscr{C}_H]$ divise $p \cdot m$. Or, $[G : H] \cdot [H : \mathscr{C}_H] = pk$ avec k diviseur de $|G|$ et $k \mid m$. Mais si ℓ est un diviseur premier de k, on sait que $\ell \geqslant p$ et donc ℓ ne peut pas diviser m. Par conséquent, $k = 1$. $\square$