Faculté de Sciences
Groupes et Anneaux 2
Janvier–Mai 2022.

Devoir surveillé n° 2

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– Le devoir a un total de 24 points. Les notes $\geqslant 20$ seront considérées comme 20.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations irresponsables vous font perdre la confiance du correcteur : Il faut les éviter à tout prix.
– La bonne compréhension et interprétation des questions fait partie du devoir.
– Le barème est donné à titre indicatif.

Conventions. Dans la suite, G désigne un groupe.

Exercice 1 (Question de cours)**.** (5pts) Soient $K \lhd G$ et $H < G$. Expliquer, en donnant toutes les démonstrations requises, l'affirmation "$K \cdot H$ est un sous-groupe de G."

Correction. Expliquer KH (1pt). Prouver que KH est sous-groupe. (4pts). □

Exercice 2. Soit $n \geqslant 1$ un entier et $G_n = \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$.

(1) (1 pt) Soit $H_n = \{g \in G_n \ : \ \det(g) \in \mathbf{R}\}$. Montrer que H_n est un sous-groupe distingué.

(2) (5 pts) Construire un isomorphisme $\varphi : G_n/H_n \to G_1/H_1$.

Correction. Soit $f : G_n \to G_1/H_1$ le morphisme $g \mapsto \det(g)H_1$. Il s'agit d'un morphisme car $\det : G_n \to G_1$ est morphisme ainsi comme $g \mapsto gH_1$ est un morphisme (la projection canonique). Le noyau de f est H_n : $f(g) = 1H_1$ si et seulement si $\det(g) \in H_1$. Par le théorème du noyau et de l'image, f induit un iso. $\varphi : G_n/H_n \to \mathrm{Im}(f)$. Finalement, chaque élément de G_1/H_1 est de la forme $f(g)$ car chaque $\lambda \in G_1$ est un déterminant, par exemple $\det(\mathrm{diag}(\lambda, 1, \dots, 1)) = \lambda$. Donc l'image est G_1/H_1.

□

(3) (5 pts) Soit $U = \{z \in \mathbf{C}^* \ : \ |z| = 1\}$ (vous pouvez admettre qu'il s'agit d'un sous-groupe de $\mathbf{C}^*$). Déterminer un isomorphisme

$$\psi : \underbrace{G_1/H_1}_{\mathbf{C}^*/\mathbf{R}^*} \longrightarrow U/\boldsymbol{\mu}_2.$$

(Indication : Pensez au cordonnées polaires.)

Correction. On définit

$$p(z) = \frac{z}{|z|}\boldsymbol{\mu}_2.$$

Comme avant, il s'agit d'un morphisme car $z \mapsto \dfrac{z}{|z|}$ est morphisme. Ensuite, $p(z) = 1\boldsymbol{\mu}_2$ signifie que $z/|z| \in \boldsymbol{\mu}_2 = \{\pm 1\} \Rightarrow z \in \mathbf{R}^*$. Et, si $z \in \mathbf{R}^*$, alors $p(z)$ est la classe du signe de z, donc $p(z) = \boldsymbol{\mu}_2$. On passe au quotient pour trouver un iso. $\psi : G_1/H_1 \to \mathrm{Im}(p)$. Il est clair que p est surjectif parce que $p(\zeta) = \zeta$ pour chaque $\zeta \in U$. Donc ψ est iso. □

Exercice 3. Soit A le sous-ensemble des bijections $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ de la forme $f : z \mapsto \lambda z + c$ avec $\lambda \in \mathbf{C}^*$.

(1) (2 pts) Montrer que A est un sous-groupe de $\mathrm{Bij}(\mathbf{C})$.

Correction. On compose $f_{c,\lambda} \circ f_{d,\mu}(z) = f_{c,\lambda}(\mu z + d) = \lambda\mu z + \lambda d + c$. Donc A est stable par composition. Ensuite, $f_{\lambda,c}(z) = w$ montre que $w - c = \lambda z \Rightarrow z = \lambda^{-1}w - \lambda^{-1}c \Rightarrow f_{\lambda,c}^{-1} = f_{\lambda^{-1},-\lambda^{-1}c}$. □

(2) (6 pts) Montrer que A est isomorphe à $\mathbf{C} \rtimes_\alpha \mathbf{C}^*$, où $\alpha : \mathbf{C}^* \to \mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ est un morphisme qu'on rendra explicite. (Ici : $\mathbf{C}$ est le groupe additif des complexes et $\mathbf{C}^*$ est le groupe multiplicatif.)

Correction. Soit H le sous-groupe des homothéties : $h_\lambda : z \mapsto \lambda z$. Soit T le sous-groupe des translations $t_c : z \mapsto z + c$. Clairement, $t : \mathbf{C} \to T$ et $h : \mathbf{C}^* \to H$ sont des isos. De plus, $T \cap H = \mathrm{id}$.

Par définition, chaque élément de A s'écrit comme produit $t_c h_\lambda$. De plus, $h_\lambda t_c(z) = \lambda z + \lambda c = t_{\lambda c} h_\lambda(z)$. Donc, $h_\lambda t_c h_\lambda^{-1} = t_{\lambda c}$. On déduit que $T \lhd A$ et que $A = TH$. La conjugaison $\gamma : H \to \mathrm{Aut}(T)$ est $\gamma(\lambda) : c \mapsto \lambda c$ par les calculs précédents. Un théorème du cours assure que $T \rtimes_\alpha H$, avec $\alpha : \mathbf{C}^* \to \mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ définit par $\alpha(\lambda) : c \mapsto \lambda c$, est isomorphe à A. □