Faculté de Sciences
Groupes et Anneaux 2
Janvier–Mai 2022.

Devoir surveillé n° 3, 20 avril 2022

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– Le devoir a un total de 26 points. Les notes $\geqslant 20$ seront considérées comme 20.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations irresponsables vous font perdre la confiance du correcteur : Il faut les éviter à tout prix.
– La bonne compréhension et interprétation des questions fait partie du devoir.
– Le barème est donné à titre indicatif.

Conventions. Dans la suite, G désigne un groupe. Un "Sylow" d'un groupe arbitraire est une abréviation de "sous-groupe de Sylow".

Exercice 1 (Question de cours)**.** (4 pts) Soit K un corps et A une K-algèbre. On suppose que en tant qu'anneau, A est intègre et en tant que K-espace vectoriel, A est de dimension finie. Montrer que A est un corps.

Correction. Soit $a \in A\backslash 0$. Soit $m : A \to A$ la multiplication par a. Comme A est intègre, $\operatorname{Ker} m = 0$. Donc m est iso. Donc existe b t.q. $ab = 1$. □

Exercice 2. (10 pts) Soit $p > 2$ un nombre premier G un groupe d'ordre $2p$ qui n'est pas commutatif. Construire un isomorphisme $\phi : \mathscr{D}_{2p} \to G$.

Correction. Soit n_q le nombre de q-Sylows de G. On sait que $n_p \mid 2$ et que $n_p \equiv 1 \mod p$. Donc $n_p = 1$ et on n'aura que un unique p-Sylow S_p. (2pts) On voit que $n_2 \mid p$ et n_2 est impair. Si $n_2 = 1$, alors on n'aura que un unique 2-Sylow, S_2 disons. Comme S_2 est distingué, on déduit que $S_p \times S_2 \to G$ définie par $(x, y) \mapsto xy$ est un isomorphisme et G est commutatif, ce qui est exclu. (2pts) On conclut alors que un 2-Sylow arbitraire, S_2, n'est pas distingué. Le groupe S_pS_2 est un sous-groupe de $2p$ éléments. Il suit que $G = S_pS_2$. (2pts) Si $c : S_2 \to \operatorname{Aut}(S_2)$ désigne la conjugaison, on sait ainsi que $G \simeq S_p \rtimes_c S_2$. Soit r un générateur de S_p et s un générateur de S_2. Il suit que $srs^{-1} = r^k$ pour un $k \in \{1, \ldots, p-1\}$. Si $k = 1$, alors $sr = rs$ et G serait commutatif, ce qui est exclu. Donc $1 < k < p$ et $c(s) : r \mapsto r^k$. Or, mais $c(s)^2 : r \mapsto r^{k^2} = r$ car $s^2 = e$; on déduit que $p \mid k^2 - 1$. Dans ce cas, soit $p \mid k - 1$, soit $p \mid k + 1$. Mais $p \mid k - 1 \leqslant p - 1$ est impossible, donc $k = p - 1$. On déduit que $srs^{-1} = r^{-1}$. Il suit que la fonction $(R^i, S^j) \mapsto r^i s^j$ est un isomorphisme car $SRS^{-1} = R^{-1}$. (4 pts) □

Exercice 3. (12 pts) Soit G un groupe d'ordre $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$. Pour $\ell \in \{3, 5, 17\}$, soit P_ℓ un ℓ-Sylow de G.

(1) (2 pts) Montrer que $P_{17} \lhd G$.

Correction. On sait que $n_{17} = 1, 3, 5$ et que $n_{17} \equiv 1 \mod 17$. Donc $n_{17} = 1$. $\square$

(2) (3 pts) D'après les théorèmes de Sylow, quels sont les ordres possibles du normalisateur $N_5 = \{g \in G : {}^gP_5 = P_5\}$?

Correction. Si n_5 désigne le nombre de 5-Sylows, alors $n_5 = |G|/|N_5|$, car N_5 est le stabilisateur de P_5. On sait que $n_5 = 1, 3, 17, 51$ et que $n_5 \equiv 1 \mod 5 \Rightarrow n_3 = 1, 51$. Il suit que $|N_5| = 255$ ou 5. $\square$

(3) (3pts) En étudiant $H := P_{17}P_5$, montrer que $P_5 \lhd G$.

Correction. P_5 est un 5-Sylow de H. Or, ne nombre de 5-Sylows dans H est soit 1, soit 17.Mais $17 \not\equiv 1 \mod 5 \Rightarrow P_5 \lhd H$. On conclut que $H \subset N_5 \Rightarrow |N_5| = 255 \Rightarrow P_5 \lhd G$. $\square$

(4) (4 pts) On admet que[1] $P_3 \lhd G$. Montrer que G est cyclique. (Je m'attends à que vous donnez une explication brève du résultat du cours portant sur la structure d'un groupe où les Sylows sont tous distingués.)

1. Ceci se démontre en suivant exactement le même raisonnement que pour montrer $P_5 \lhd G$.