Groupes et anneaux 2
Janvier–Mai 2023.

Feuille d'exercices n° 1

Faits basiques les actions

Exercice 1. Les actions suivantes, sont-elles libres ? Transitives ?

1/ L'action de $\mathscr{S}_n$ sur $\{1, \ldots, n\}$.

2/ L'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ sur les droites vectorielles de $\mathbf{R}^2$.

3/ L'action de $\mathscr{D}_{2n}$ sur $\boldsymbol{\mu}_n$. (Ici, $n \geqslant 2$.)

4/ L'action de $\mathscr{S}_3$ par conjugaison sur ses sous-groupes d'ordre 2.

5/ L'action de $\mathrm{O}_3(\mathbf{R})$ sur la sphère $S^2 \subset \mathbf{R}^3$.

Exercice 2. L'action de $\mathscr{D}_{2n}$ sur les racines de l'unité $\boldsymbol{\mu}_n$, est-elle une action par morphismes de groupe ?

Exercice 3. Soit H un sous-groupe de G. Soit G_{s} l'ensemble G avec l'action de H par translations à gauche et G_{d} l'ensemble G avec translations à droite. Vérifier que l'inversion $\iota : G_{\mathrm{s}} \to G_{\mathrm{d}}$, $\iota(g) = g^{-1}$, est une bijection H–équivariante.

Le quotient par une action

Exercice 4. Utilisant l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$ sur l'ensemble P des droites vectorielles de $\mathbf{F}_2^2$, montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2) \simeq \mathscr{S}_3$. Utiliser l'action de $\mathscr{D}_6$ sur $\boldsymbol{\mu}_3$ pour montrer que $\mathscr{D}_6 \simeq \mathscr{S}_3$.

Exercice 5 (Les quotients vus géométriquement)**.** (1) Déterminer une bijection entre $\mathbf{Z}\backslash\mathbf{R}$ et le cercle $S^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$.

(2) Soit $X = \mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ muni de l'action de $\mathbf{R}^*$ par multiplication scalaire. Déterminer une bijection entre $\mathbf{R}^*\backslash X$ et le cercle.

(3) On désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle. Soit O_n le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ formé par les matrices $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ telles que $\|A\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$ pour tout $\vec{v}$.

a) Montrer que l'ensemble des matrices de la forme

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

avec $A \in \mathrm{O}_{n-1}$ est un sous-groupe. Construire ensuite une bijection $\mathrm{O}_n/\mathrm{O}_{n-1} \to S^{n-1}$, où $S^{n-1} = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^n \,:\, \|\vec{v}\| = 1\}$.

Exercice 6. Soit p un nombre premier, r un entier strictement positif et G un groupe d'ordre p^r. (De tels groupes sont appelés des p-groupes.)

(1) On se donne un G-ensemble fini X. Soit $x \in X$ tel que $|O(x)| > 1$. Montrer que $|O(x)| \equiv 0 \mod p$. En déduire que

$$|X| \equiv |X^G| \mod p.$$

(2) Soit F l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to G$. Pour chaque $a \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et $f \in F$, soit $a * f$ la fonction $x \mapsto f(a+x)$. Montrer que cette règle définit une action.

(3) Soit $X = \{f \in F \,:\, f(\overline{0}) \cdots f(\overline{p-1}) = e\}$. Montrer que F est stable par l'action et en employant la question (1), montrer que g possède un élément d'ordre p.

Exercice 7. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. Le normalisateur de H est $N_G(H) =: \{g \in G \,:\, gHg^{-1} = H\}$. Il s'agit d'un sous-groupe de G contenant H.

(1) Soit $G = \mathscr{D}_8$ et H le sous-groupe engendré par la reflexion S. Déterminer $N_G(H)$. Même question avec $G = \mathscr{D}_{12}$ et H le sous-groupe engendré par la reflexion.

(2) En utilisant l'action de G par conjugaison sur ses sous-groupes, montrer que $[G : N_G(H)]$ est le nombre de conjugués de H.

Exercice 8. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. On laisse G agir sur G/H par translations à gauche. Pour un $x \in G$, déterminez St_{xH} en fonction de H et x. Soit K un autre sous-groupe de G. Montrer que les G-ensembles G/H et G/K sont isomorphes si et seulement si H et K sont conjugués.

Exercice 9 (Le théorème de Burnside)**.** Soit G un groupe fini et X un ensemble fini sur lequel G agit. Pour chaque $g \in G$ on écrit $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \,:\, gx = x\}$; c'est l'ensemble de points fixes de g. Si on note par q le nombre d'orbites de G en X, montrer que

$$q = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

Indication : Soit $S = \{(g,x) \in G \times X \,:\, gx = x\}$; on désigne par $p_X : S \to X$ et $p_G : S \to G$ les projections évidentes. Compter $|S|$ en utilisant les images réciproques.

Exercice 10. Soit G un groupe d'ordre n opérant transitivement sur un ensemble X de cardinal ℓ.

(1) Montrer que $\ell \mid n$.

(2) Montrer que l'union $\bigcup_{x \in X} \mathrm{St}_x$ est de cardinal inférieur ou égal à $n - \ell + 1$.

(3) Si $\ell \geqslant 2$, montrer qu'il existe au moins $\ell - 1$ éléments de G qui n'ont pas de point fixe.

(4) Application : montrer qu'un groupe fini n'est jamais la réunion des conjugués d'un sous-groupe propre.

(5) En étudiant l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ sur les droites vectorielles de $\mathbf{C}^2$, montrer que l'affirmation de la question précédente est fausse si G n'est pas fini.