Groupes et anneaux 2
Janvier–Mai 2023.

Feuille d'exercices n° 4

Conventions. Dans la suite, tous les anneaux sont commutatifs. On fixera également un anneau A.

Les anneaux et ses idéaux

Exercice 1. Soit $I \neq A$ un idéal.

(1) Montrer que I est premier si et seulement si vaut le "Lemme d'Euclide" : étant donnés $x, y \in A$ tels que $xy \in I$, alors soit $x \in I$, soit $y \in I$.

(2) Montrer que I est maximal si et seulement si les uniques idéaux contenant I sont I et A.

Exercice 2. Montrer que pour chaque couple $a, b \in \mathbf{C}$, l'idéal $(X-a, Y-b)$ de $\mathbf{C}[X,Y]$ est maximal. *Indication* : Si ev : $\mathbf{C}[X,Y] \to \mathbf{C}$ désigne l'évaluation $f \mapsto f(a,b)$, déterminer $\mathrm{Ker}(\mathrm{ev})$.

Exercice 3. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux faisant de B une A-algèbre. Soit I un idéal de A ; on définit *son extension* à B comme étant

$$I \cdot B := \left\{ \begin{array}{l} \text{éléments de la forme } b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n \\ \text{avec } n > 0 \text{ entier quelconque,} \\ \ a_1, \ldots, a_n \in I \text{ et } b_1, \ldots, b_n \in B \end{array} \right\}.$$

Montrer que $I \cdot B$ est un idéal de B. Ensuite, prouver que

$$A[X]/I \cdot A[X] \simeq (A/I)[X].$$

Exercice 4. Soient I un idéal de A et $\overline{A} = A/I$ l'anneau quotient. La projection canonique sera désignée par $\pi : A \to \overline{A}$.

(1) Montrer que

$$\Psi : \{\text{idéaux contenant } I\} \longrightarrow \left\{\text{idéaux de } \overline{A}\right\}$$
$$J \longrightarrow \pi(J)$$

est bien définie et bijective. Ensuite, déterminer l'inverse de Ψ.

(2) Soit J un idéal contenant I. Montrer que $A/J \simeq \overline{A}/\pi(J)$.

(3) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de A et J l'idéal $(a_1, \ldots, a_n)$. Montrer que

$$A/(I+J) \simeq \overline{A}/(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)).$$

(4) Soient $f \in \mathbf{Q}[X]$ et $g \in \mathbf{Q}[Y]$ de degré strictement positifs. Montrer que $\mathbf{Q}[X,Y]/(f,g)$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 5 (Le théorème Chinois)**.** Deux idéaux I et J de A sont dits *co-maximaux* si $I + J = A$.

(1) Montrer que si I et J sont co-maximaux, alors $I \cdot J = I \cap J$ et

$$A/I \cdot J \simeq A/I \times A/J.$$

(2) Donner un exemple d'un couple d'idéaux co-maximaux I, J sous les conditions suivante. (a) $A = \mathbf{Q}[X]$. (b) $A = \mathbf{Q}[X,Y]$ et ni I, ni J est maximal.

Exercice 6 (Somme de deux carrés)**.** Soit $p > 2$ un nombre premier et $\square_p := \{a^2 \ : \ a \in \mathbf{F}_p^*\}$ l'ensemble des carrés non-nuls dans $\mathbf{F}_p$.

(1) Montrer que les racines de $X^{\frac{p-1}{2}} - 1$ sont précisément $\square_p$. (On pourra utiliser le principe du berger pour déterminer $\#\square_p$.)

(2) En déduire que $-1 \in \square_p$ si et seulement si $p \equiv 1 \mod 4$.

(3) Montrer que $p\mathbf{Z}[\mathrm{i}]$ est maximal si et seulement si $-1 \notin \square_p$.

(4) Utiliser le fait que $\mathbf{Z}[\mathrm{i}]$ est un anneau factoriel pour montrer que $p\mathbf{Z}[\mathrm{i}]$ est maximal si et seulement si *p n'est pas somme de deux carrés*, c'est-à-dire, $p \notin \{a^2 + b^2 \ : \ a, b \in \mathbf{Z}\}$. (Indication : Si $z \mid p$, alors $\overline{z} \mid p$ aussi.)