Sorbonne Université
Groupes finis et leurs représentations
Janvier–Mai 2019 (4M014).

---

# Examen du lundi 6 mai 2019

---

**Consignes :** – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– Le devoir a un total de 24 points. Les notes $\geqslant 20$ seront considérées comme 20.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations irresponsables vous font perdre la confiance du correcteur : Il faut les éviter à tout prix.
– La bonne compréhension et interprétation des questions fait partie du devoir.
– Le barème est donné à titre indicatif.

**Exercice 1.** (4 pts) Soit $G$ un groupe et $X$ un $G$-ensemble ayant une unique orbite. On dira que $B \subset X$ est un *bloc* si, pour chaque $g \in G$, l'ensemble $g(B) \cap B$ est soit *vide*, soit *égal à* $B$. On fixe à présent un $x_0 \in X$.

1. Soit $B$ un bloc de $X$ contenant $x_0$. Montrer que $H_B = \{g \in G \,:\, g(x_0) \in B\}$ est un sous-groupe de $G$ contenant $\mathrm{St}(x_0)$.
2. Soit $H$ un sous-groupe de $G$ tel contenant $\mathrm{St}(x_0)$. Montrer que $Hx_0 = \{h(x_0) \,:\, h \in H\}$ est un bloc de $X$ contenant $x_0$.

**Exercice 2.** (4 pts) Soit $G$ un groupe fini et $H$ un sous-groupe de $G$. On suppose que pour chaque représentation complexe de dimension finie $V$ de $G$, on a l'égalité $\dim_{\mathbb{C}} V^G = \dim_{\mathbb{C}} V^H$. Montrer que $G = H$.

**Exercice 3.** (8 pts) On fixe $\mathbb{K}$ un corps et $G$ un groupe *arbitraire*. Dans la suite, toutes les représentations sont de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

1. (1 pt) Rappeler la définition d'une représentation semi-simple de $G$.
2. (2 pts) On fixe $L$ une représentation simple de $G$. Soit $S \subset L^2$ une sous-représentation simple. Montrer que $S \simeq L$.

On fixe $V$ une représentation arbitraire de $G$. On dira qu'un vecteur $v \in V$ est $L$-isotypique si $v$ appartient à un sous-espace $G$-invariant $U$ de $V$ tel que $L \simeq U$. On note $\mathrm{Soc}_L(V)$ l'ensemble, supposé non vide, des vecteurs $L$-isotypiques de $V$.

2. (4 pts) Montrer que $\mathrm{Soc}_L(V)$ est une sous-représentation de $V$.

**Exercice 4.** (8 pts) Soit $G$ le groupe dihédral de $8 = 2 \times 4$ éléments. On note $R$ la rotation (anti-horaire) d'angle $\frac{2\pi}{4}$ autour de l'origine et $S$ la reflexion sur l'axe des $x$. On rappelle que avec ces notations, on a

$$G = \{I, R, R^2, R^3\} \cup \{S, RS, R^2S, R^3S\}.$$

1. (3 pts) En utilisant $[G, G] = \langle R^2 \rangle$, déterminer explicitement (=en terme de groupes cycliques) le groupe $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$. En déduire le nombre de classes d'isomorphisme de représentations complexes de dimension 1 de $G$.
2. (2 pts) Déterminer explicitement les classes de conjugaison de $G$.
3. (3 pts) Déterminer explicitement la table de caractères de $G$.