Sorbonne Université
Groupes finis et leurs représentations
Janvier–Mai 2019 (4M014).

Examen 1

Vous devez rendre vos réponses *au plus tard au 19 mai, 12h00.*

Consignes :

- Le travail est individuel.
- Vous pouvez utiliser vos notes de cours, les feuilles de TD et des livres.
- En rendant votre devoir, vous attestez sur l'honneur ne pas avoir consulté internet pour chercher des solutions.
- La correction fera une attention particulière à la clarté et l'efficacité de la rédaction. Les affirmations grossières et irréfléchies seront sanctionnées.
- Le devoir a un total de 31 points. Les notes $\geqslant 20$ seront notées comme 20.
- N'oubliez pas de *numéroter* les pages de votre travail.
- N'oubliez pas de réserver un temps considérable pour *numériser et déposer* vos réponses. Ceci évitera des oublis, erreurs, etc.

Glossaire et conventions.

- Si $X \subset G$ est un sous-ensemble d'un groupe, le sous-groupe engendré par X est l'intersection des sous-groupes de G contenant X.
- Un groupe est dit *trivial* s'il n'a qu'un seul élément.
- Un sous-groupe H d'un groupe G est dit *sous-groupe propre* si $H \neq G$.
- Le centre d'un groupe G sera noté par $Z(G)$.
- Si G est un groupe et x, y sont des éléments de G, le *commutateur* $[x, y]$ est l'élément $xyx^{-1}y^{-1}$. Si H et K sont des sous-groupes de G, le groupe $[H, K]$ est le sous-groupe engendré par $\{[h, k] : h \in H, k \in K\}$. On définit $C^0(G) := G$ et $C^{n+1}(G) = [C^n(G), G]$ pour $n > 0$.
- Les représentations sont supposées de *dimension finie* sur le corps en question.

Exercice 1. (5pts) Soit $n \geqslant 2$ un entier. Prouver qu'il existe un sous-groupe $S < \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \rtimes S$. Le sous-groupe S, est-il unique ? Est-il unique à isomorphisme près ?

Exercice 2. Soit G un groupe.

1/ (1pt) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $C^n(G) \lhd G$.

2/ (1pt) On se donne deux sous-groupes H et K de G. Montrer que si $H \lhd G$, alors $[H, K]$ est un sous-groupe de H.

3/ (1pts) On se donne deux sous-groupes H et K de G. Prouver ou donner un contre-exemple à l'affirmation "$[H, K]$ est un sous-groupe de H."

4/ (2pts) On suppose G nilpotent et non-trivial. Montrer que si $N \lhd G$ est non-trivial, alors $[N, G]$ est un sous-groupe *propre* de N.

5/ (2pts) On suppose que G soit *fini* et que que pour chaque $N \lhd G$ non-trivial, $[N, G]$ est un sous-groupe *propre* de N. Prouver que G est nilpotent.

Exercice 3. (4pts) Soit p un nombre premier et D l'ensemble des drapeaux complets de $\mathbb{F}_p^n$. En utilisant l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ sur D et l'égalité

$$|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)| = p^{n(n-1)/2}(p^n - 1)(p^{n-1} - 1)(p^{n-2} - 1) \cdots (p - 1)$$

déterminer explicitement $|D|$.

Exercice 4. (6pts) Soient G un groupe, $\mathbb{K}$ un corps (aucune autre hypothèse !) $L_1, \ldots, L_r$ des représentations de G de *dimension un* et V la représentation $L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$. Prouver ou donner contre-exemple à : Toute sous-représentation $U \neq \{0\}$ de V est isomorphe à $M_1 \oplus \cdots \oplus M_s$ où les M_j sont des représentations de dimension un.

Exercice 5. Soit G un groupe fini. Dans la suite, étant donné une action de G sur un ensemble fini X, on désigne par χ_X le caractère de la représentation sur l'espace $F_X = \{\text{fonctions de } X \text{ dans } \mathbb{C}\}$.

1/ (2pts) Soient X et Y des G-ensembles finis. On induit sur $X \times Y$ l'action à gauche évidente : $g(x, y) = (gx, gy)$ pour tout $x \in X$, $y \in Y$ et $g \in G$. Quel est le lien entre $\chi_{X \times Y}$ et χ_X et χ_Y ?

2/ (3pts) Soit X un ensemble sur lequel G agit transitivement. On dit que l'action est de plus *2-transitive* si :

$$\text{Étant donné deux couples } (x, y) \text{ et } (x', y') \text{ tels que } x \neq y \text{ et } x' \neq y',$$
$$\text{il existe } g \in G \text{ tel que } x' = gx \text{ et } y' = gy.$$

En étudiant la décomposition de $X^2 = X \times X$ en orbites, montrer que l'action est 2-transitive si et seulement si $\|\chi_X\|^2 = 2$. (Ici $\| - \|^2$ fait référence au produit Hermitien sur l'espace F_G vu en cours.)

3/ (4pts) Soit X un ensemble fini sur lequel G agit transitivement. Soit $I_X \subset F_X$ la sous-représentation donnée par les fonctions $\varphi : X \to \mathbb{C}$ telles que $\sum_{x \in X} \varphi(x) = 0$.

Montrer que l'action de G sur X est 2-transitive $\Leftrightarrow$ I_X est simple.