Sorbonne Université
Groupes finis et leurs représentations
Janvier–Mai 2020 (4M014).

Examen 1 – Corrigé

Chers étudiants,

Je n'ai pas écrit des commentaires sur les copies [1], mais je vous offre un corrigé avec des commentaires.

Il va sans dire que les indications sur l'attribution des points ne sont que des guides pour moi et que je préfère donner une note globale à la qualité des arguments (un amalgame de faits n'est pas un argument). De même, les réponses rédigés de façon confuse et mal structurée ont été pénalisées.

Exercice 1. (5pts) Soit $n \geqslant 2$ un entier. Prouver qu'il existe un sous-groupe $S < \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \rtimes S$. Le sous-groupe S, est-il unique ? Est-il unique à isomorphisme près ?

Correction. Comme SL_n est le noyau du déterminant, on voit que $\mathrm{SL}_n \lhd \mathrm{GL}_n$.

Soit S le sous-groupe des matrices ayant la forme $\mathrm{diag}(\lambda, 1 \ldots, 1)$, où $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On voit que $S \cap \mathrm{SL}_n = 1$. Ensuite, soit $g \in \mathrm{GL}_n$ de déterminant d. Alors $\mathrm{diag}(1/d, 1, \ldots, 1)g \in \mathrm{SL}_n$, et chaque matrice $g \in \mathrm{GL}_n$ s'écrit comme produit $\mathrm{diag}(d, 1 \ldots, 1) \cdot \mathrm{diag}(1/d, 1, \ldots, 1)g$. Ceci prouve que le couple S et SL_n remplit la condition pour écrire $\mathrm{GL}_n = \mathrm{SL}_n \rtimes S$.

Le groupe S' des matrices ayant la forme $\mathrm{diag}(1 \ldots, 1, \lambda)$ convient et le même argument donne $\mathrm{GL}_n = \mathrm{SL}_n \rtimes S'$; S n'est pas unique.

Par contre, on sait que $S \simeq \mathrm{GL}_n/\mathrm{SL}_n \simeq \mathbb{C}^\times$, via le déterminant $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathbb{C}^*$, et S est unique à iso. près.

Notation. 3 pts pour trouver un S convenable et savoir ce que $\mathrm{GL}_n = \mathrm{SL}_n \rtimes S$ signifie exactement. 1 pt pour noter que plusieurs S sont possibles et 1 pt pour noter qu'ils sont tous $\simeq \mathbb{C}^*$.

Erreurs rencontrés : Il faut savoir multiplier les matrices : la formule

$$g = \mathrm{diag}(\det(g), 1, \ldots, 1) \cdot g \cdot \mathrm{diag}(1/\det(g), 1, \ldots, 1)$$

est fausse en général. De même, prendre $S = \{\mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda) \, : \, \lambda \in \mathbb{C}^*\}$ ne convient pas car $\det(\lambda, \ldots, \lambda)$ peut être égal à un et donc $S \cap \mathrm{SL}_n \neq I$.

Le fait que S soit unique à isomorphisme près n'est pas justifié en montrant que dans toutes les alternatives plus ou moins évidentes, à savoir les sous-groupes de la forme

$$S' = \{\mathrm{diag}(1, \ldots, \lambda, 1, \ldots, 1) \, : \, \lambda \in \mathbb{C}^*\} \, ,$$

1. Les copies ont été déposées sur Moodle. Je ne me rappelle plus combien de temps les étudiants ont eu pour rédiger leurs réponses.

sont tous isomorphes à $\mathbb{C}^*$. En effet, on peut, pour n'importe quelle $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, choisir

$$S_A = A \cdot \{\mathrm{diag}(\lambda, 1, \ldots, 1) \,:\, \lambda \in \mathbb{C}^*\} \cdot A^{-1},$$

qui n'aura pas, en général, la forme évidente (mais est encore $\simeq \mathbb{C}^\times$). □

Exercice 2. Soit G un groupe.

1/ (1pt) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $C^n(G) \lhd G$.

Correction. Il suffit de montrer que si $H \lhd G$ et $K \lhd G$ alors $[H, K] \lhd G$ et faire une récurrence pour montrer que $C^n(G) \lhd G \Rightarrow C^{n+1}(G) \lhd G$.

Soit $X = \{[h, k] \,:\, h \in H,\, k \in K\}$. Soit $g \in G$ et soit $c_g : G \to G$ la conjugaison. On a $c_g([h, k]) = [c_g(h), c_g(k)]$. Donc $c_g(X) = X$. Donc, $X = c_g(X) \subset c_g([H, K]) \Rightarrow [H, K] < c_g([H, K]) \Rightarrow c_{g^{-1}}([H, K]) \subset [H, K] \Rightarrow [H, K] \lhd G$ car g est arbitraire.

Commentaires. L'argument complet doit faire appel au fait que $[H, K]$ est *engendré* par les commutateurs. Par contre, je trouve excessif demander une telle rigueur lors d'un examen et je n'ai pas fait trop d'attention à ce point. J'ai cherché à donner 1pt pour l'argument "conjugaison préserve les commutateurs". □

2/ (1pt) On se donne deux sous-groupes H et K de G. Montrer que si $H \lhd G$, alors $[H, K]$ est un sous-groupe de H.

Correction. On doit montrer que H contient l'ensemble de commutateurs $[h, k]$, où $h \in H$ et $k \in K$. Or, $[h, k] = h \cdot kh^{-1}k^{-1} \in H$.

□

3/ (1pts) Soient H et K des sous-groupes de G. Prouver ou donner un contre-exemple : $[H, K]$ est un sous-groupe de H.

Correction. Soient $G = \mathscr{S}_3$, $H = \langle (12) \rangle$ et $K = \langle (123) \rangle$. On sait que $K \lhd G$ et donc $[H, K] < K$. Ensuite, un calcul direct montre que $(123) \in [H, K]$. Donc $[H, K] = K$ et H ne contient pas $[H, K]$.

Commentaires. Bien évidemment, d'autres contre-exemples sont possibles. Par contre, les contre-exemples qui ont l'air de fonctionner, mais qui sont beaucoup trop difficiles à vérifier (même pour moi) ont été sanctionnés. La responsabilité des affirmations revient à ceux qui les écrivent. □

4/ (2pts) On suppose G nilpotent et non-trivial. Montrer que si $N \lhd G$ est non-trivial, alors $[N, G]$ est un sous-groupe propre de N.

Correction. Soit $N \lhd G$ tel que $[N, G] = N$. Il suit que $N < C^1(G)$. On suppose $N < C^n(G)$. Donc $N = [N, G] \subset [C^n(G), G] = C^{n+1}(G)$. Donc $N \subset \bigcap C^n(G) = \{e\}$. Donc N est trivial : si $N \lhd G$ est tel que $N = [N, G]$, alors $N = e$. □

5/ (2pts) On suppose que G soit fini et que que pour chaque $N \lhd G$ non-trivial, $[N, G]$ est un sous-groupe propre de N. Prouver que G est nilpotent.

Correction. On suppose que $C^n(G)$ n'est jamais trivial. Comme $C^n(G) \lhd G$, il suit que $C^{n+1}(G) \subsetneqq C^n(G)$. Ceci est impossible car la suite d'entiers $|C^n(G)|$ est strictement décroissante et > 1. □

Exercice 3. (5pts) Soit p un nombre premier et D l'ensemble des drapeaux complets de $\mathbb{F}_p^n$. En utilisant l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ sur D et l'égalité

$$|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)| = p^{n(n-1)/2}(p^n - 1)(p^{n-1} - 1)(p^{n-2} - 1) \cdots (p - 1)$$

déterminer explicitement $|D|$.

Correction. L'action est transitive : si $[f_1, \ldots, f_n]$ est une base adaptée au drapeau F, alors F est l'image du drapeau canonique C par la matrice $[f_1, \ldots, f_n]$. On sait aussi que St est B, le groupe des matrices inversibles triangulaires supérieures. Or, B possède $(p-1)^n p^{n-1} p^{n-2} \cdots p = (p-1)^n p^{n(n-1)/2}$ éléments (Lemme 66) et donc $|D| = \dfrac{(p^n - 1) \cdots (p - 1)}{(p-1)^n}$.

Commentaires. J'ai noté la question de la façon suivante : 2,5 pour mentionner et donner une indication de preuve du fait que l'action est transitive. (Pour indication de preuve, il était suffisant de faire référence au TD4, par exemple.) Ensuite, 1pt pour la formule de classes et 1,5 pour le cardinal du stabilisateur (qui était dans les notes de cours). □

Exercice 4. (5pts) Soient G un groupe, $\mathbb{K}$ un corps (aucune autre hypothèse !) $L_1, \ldots, L_r$ des représentations de G de *dimension un* et V la représentation $L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$. Prouver ou donner contre-exemple à : Toute sous-représentation $U \neq \{0\}$ de V est isomorphe à $M_1 \oplus \cdots \oplus M_s$ où les M_j sont des représentations de dimension un.

Correction. Clairement V est semi-simple car les reps de dim 1 sont simples. Donc, U est aussi semi-simple. (Lemme 104.) Il suit que $U \simeq S_1 \oplus \cdots \oplus S_r$ avec chaque S_i simple. On affirme que $\dim S_i = 1$. Soit $p_j : V \to L_j$ la projection. Soit $u_{ij} : S_i \to U \to V \to L_j$ la composition. Pour un certain j cette composition est non-nulle. Donc, $S_i \to L_j$ est non-nulle. Donc $S_i \simeq L_j$ par Schur et S_i est de dimension 1.

Commentaires. Cette question n'a pas été bien travaillée. Une autre réponse possible, donnée par un étudiant, était la suivante : On écrit $U \simeq S_1 \oplus \cdots \oplus S_t$ avec S_j simple. On complète $V = U \oplus C$. La décomposition isotypique est unique à permutation près et donc chaque S_j est isomorphe à un certain L_k. □

Exercice 5. Soit G un groupe fini. Dans la suite, étant donné une action de G sur un ensemble fini X, on désigne par χ_X le caractère de la représentation sur l'espace $F_X = \{\text{fonctions de } X \text{ dans } \mathbb{C}\}$.

1/ (2pts) Soient X et Y des G-ensembles finis. On induit sur $X \times Y$ l'action à gauche évidente : $g(x, y) = (gx, gy)$ pour tout $x \in X$, $y \in Y$ et $g \in G$. Quel est le lien entre $\chi_{X \times Y}$ et χ_X et χ_Y ?

Correction. On sait que $\chi_X(g) = |\mathrm{Fix}(g)|$ (et de même pour Y et $X \times Y$) d'après Thm. 138. On note que $g(x,y) = (x,y)$ si et seulement si $x \in \mathrm{Fix}(g_X)$ et $y \in \mathrm{Fix}(g_Y)$. Ceci implique que $\mathrm{Fix}(g_{X\times Y}) = \mathrm{Fix}(g_X) \times \mathrm{Fix}(g_Y)$. Il suit que $\chi_{X\times Y}(g) = \chi_X(g)\chi_Y(g)$.

Quelques erreurs : La représentation F_X n'est pas l'ensemble X et ainsi $X \otimes Y$ n'a pas de sens.

Il n'est pas suffisant d'affirmer que $F_X \otimes F_Y \simeq F_{X\times Y}$ (cela revient à calculer les dimensions !) *sans* faire attention à l'action de G, c'est-à-dire, sans mentionner que cet isomorphisme est équivariant. □

2/ (3pts) Soit X un ensemble sur lequel G agit transitivement. On dit que l'action est de plus *2-transitive* si :

Étant donné deux couples (x,y) et (x',y') tels que $x \neq y$ et $x' \neq y'$,
il existe $g \in G$ tel que $x' = gx$ et $y' = gy$.

En étudiant la décomposition de $X^2 = X \times X$ en orbites, montrer que l'action est 2-transitive si et seulement si $\|\chi_X\|^2 = 2$. (Ici $\| - \|^2$ fait référence au produit Hermitien sur l'espace F_G vu en cours.)

Correction. Soit $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$. L'action est transitive $\Rightarrow$ Δ est une orbite pour l'action de G sur X^2. L'action est 2-transitive si et seulement si $X^2 \setminus \Delta$ est une orbite. On déduit que l'action est 2-transitive si et seulement si $X \times X$ possède *deux* orbites : Δ et $X^2 \setminus \Delta$.

Ensuite, on utilise le fait que le nombre d'orbites est $\langle \chi_{X^2}, 1\rangle$ (c'est le point clé, voir Thm. 138). Or, par la question précédente et le fait que $\chi_X(g) = |\mathrm{Fix}(g)| \in \mathbb{N}$, on déduit $\langle \chi_{X^2}, 1\rangle = \langle \chi_X, \chi_X\rangle = \|\chi_X\|^2$.

□

3/ (4pts) Soit X un ensemble fini sur lequel G agit transitivement. Soit $I_X \subset F_X$ la sous-représentation donnée par les fonctions $\varphi : X \to \mathbb{C}$ telles que $\sum_{x\in X} \varphi(x) = 0$.

Montrer que l'action de G sur X est 2-transitive $\Leftrightarrow$ I_X est simple.

Correction. On commence par noter que $\chi_{I_X} = \chi_X - 1$, car $F_X = \mathbb{1} \oplus I_X$.

($\Rightarrow$). On a $\|\chi_X\|^2 = 2$ car l'action est 2-transitive. Donc,

$$\|\chi_{I_X}\|^2 = 2 + 1 - 2\langle \chi_X, 1\rangle.$$

Puisque G agit transitivement sur X, on sait que $\langle \chi_X, 1\rangle = 1$ (Thm. 138). Donc, $\|\chi_{I_X}\|^2 = 1$ et I_X est simple d'après le Cor. 137.

($\Leftarrow$). Comme avant, $1 = \|\chi_{I_X}\|^2 = \|\chi_X\|^2 + 1 - 2\langle \chi_X, 1\rangle$. Or, $\langle \chi_X, 1\rangle = 1$ (Thm. 138) et donc $1 = \|\chi_X\|^2 + 1 - 2$ et $\|\chi_X\|^2 = 2$. □

Commentaire. Quelques étudiants ont utilisé le fait que $\langle \chi_{I_X}, 1 \rangle = 0$. Ceci est vrai, mais pas immédiat. C'est une conséquence du fait que $1 = \langle \chi_X, 1 \rangle = 1 + \langle \chi_{I_X}, 1 \rangle$ car X n'a qu'une seule orbite. Ceux qui ont utilisé cette hypothèse sans l'avoir prouvée (ou au moins noter qu'elle n'est pas immédiate) ont eu -1.