Sorbonne Université
Groupes finis et leurs représentations
Janvier–Mai 2021.

Examen 1 – 4 mai 2021

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– Le devoir a un total de 60 points. Les notes $\geqslant 50$ seront considérées comme 50.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations irresponsables vous font perdre la confiance du correcteur : Il faut les éviter à tout prix.
– La bonne compréhension et interprétation des questions fait partie du devoir.
– Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (15 pts)**.** Soit $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On désigne par L_1 la droite $\mathbb{C}e_1$ et par L_2 la droite $\mathbb{C}e_2$. Soit

$$G = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \,:\, g(L_1 \cup L_2) = L_1 \cup L_2\}.$$

(Vous pouvez admettre que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.) Montrer que

$$G \simeq (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*) \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

où $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)$ est à déterminer. Indication : On étudiera l'action de G sur l'ensemble de deux éléments $X = \{L_1, L_2\}$.

Exercice 2 (15pts)**.** Soient p un nombre premier et $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le corps avec p éléments. Soient $0 < k < n$ des entiers et X l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de K^n. Obtenir une formule explicite, en fonction de p, k, n et $\ell := n - k$, pour $|X|$.

Exercice 3 (14 pts)**.** Faire les exercices suivants.

1/ (5 pts) Soit G un groupe abélien et $V \neq 0$ une représentation complexe simple de dimension finie de G. Montrer que $\dim V = 1$. (Étudier les sous-espaces propres.)

2/ (3 pts) Donnez un contre-exemple à l'affirmation obtenue de la précédente en remplaçant "complexe" par "réelle".

3/ (6 pts) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la représentation $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ déterminée par $\rho(k) = A^k$ est semi-simple si et seulement si A est diagonalisable (=possède une base dont chaque élément est vecteur propre).

Exercice 4 (16 pts)**.** Soit G un groupe fini.

1/ (4 pts) Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation avec caractère χ_V. Montrer que $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$ pour tout $g \in G$.

2/ On considère les deux propriété suivantes.

(a) Chaque élément de G est conjugué à son inverse.

(b) Pour chaque caractère de Frobenius χ de G et chaque $g \in G$, le nombre complexe $\chi(g)$ est en fait *réel*.

(2pts) Montrer que (a)$\Rightarrow$(b).

(10pts : **Bonus**) Ensuite, en regardant les fonctions caractéristiques des classes de conjugaison, prouver que (b)$\Rightarrow$(a).