Sorbonne Université
Groupes finis et leurs représentations
Janvier–Mai 2021.

Examen 1 – 4 mai 2021

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– Le devoir a un total de 60 points. Les notes $\geqslant 50$ seront considérées comme 50.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations irresponsables vous font perdre la confiance du correcteur : Il faut les éviter à tout prix.
– La bonne compréhension et interprétation des questions fait partie du devoir.
– Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (15 pts)**.** Soit $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On désigne par L_1 la droite $\mathbb{C}e_1$ et par L_2 la droite $\mathbb{C}e_2$. Soit

$$G = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \, : \, g(L_1 \cup L_2) = L_1 \cup L_2\}.$$

(Vous pouvez admettre que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.) Montrer que

$$G \simeq (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*) \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

où $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)$ est à déterminer. Indication : On étudiera l'action de G sur l'ensemble de deux éléments $X = \{L_1, L_2\}$.

Correction. L'action sur X nous donne un morphisme de groupes $G \to \mathscr{S}_2$. Soit K le noyau. Clairement, K est le sous-groupe des $g \in G$ tels que $g(L_i) = L_i$. On note que

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \, : \, \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{C}^* \right\} \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*.$$

Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G$. Clairement $\langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/2$. On a pour tout $k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} \in K$:

$$\sigma k \sigma = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \\ & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

De plus, $\sigma \notin K$ car σ échange L_1 et L_2. Donc $K \cap \langle \sigma \rangle = \{\mathrm{id}\}$. De plus, si $g \in G$ n'appartient pas à K, alors $g(L_1) = L_2$ et $g(L_2) = L_1$ et donc $g\sigma \in K$. On déduit que $G = K \rtimes \langle \sigma \rangle$. Finalement, φ est déterminé par l'élément $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto (\lambda_2, \lambda_1)$ de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*)$.

Notation. Trouver K = 4pts. Observer que $K \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ = 2pts. Chercher σ ou équivalent = 2pt. Vérifier que $G = K \rtimes \langle \sigma \rangle$ et déterminer le bon φ = 7pts $\square$

Exercice 2 (15pts)**.** Soient p un nombre premier et $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le corps avec p éléments. Soient $0 < k < n$ des entiers et X l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de K^n. Obtenir une formule explicite, en fonction de p, k, n et $\ell := n - k$, pour $|X|$.

Correction. On considère le sous-espace $E = \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_k)$. Si $F \in X$ est un autre sous-espace, alors il existe $g \in \mathrm{GL}_n$ tel que $g(E) = F$, c'est-à-dire, GL_n agit de façon transitive sur X. Donc,

$$|X| = \frac{|\mathrm{GL}_n|}{|\mathrm{St}_E|}.$$

Nous savons calculer $|\mathrm{GL}_n|$:

$$\begin{aligned}|\mathrm{GL}_n| &= (p^n - 1) \cdots (p^n - p^{n-1}) \\ &= p^{n(n-1)/2}(p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \cdots (p - 1) \\ &= p^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} (p^i - 1).\end{aligned}$$

Il nous reste le calcul de $|\mathrm{St}_E|$. Or, $g \in \mathrm{GL}_n$ fixe E si et seulement si $g_{ij} = 0$ pour chaque $1 \leqslant i \leqslant k$ et $j > k$. Donc, St_E est le sous-groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} A & W \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $A \in \mathrm{GL}_k$, $B \in \mathrm{GL}_\ell$ et W est une matrice $k \times (n-k)$ arbitraire. Donc $\#\mathrm{St}_E = p^{k\ell} \cdot |\mathrm{GL}_k| \cdot |\mathrm{GL}_\ell|$. Donc,

$$|X| = p^{n(n-1)/2 - k\ell - k(k-1)/2 - \ell(\ell-1)/2} \frac{\prod_{i=1}^{n}(p^i - 1)}{\prod_{i=1}^{k}(p^i - 1) \cdot \prod_{i=1}^{\ell}(p^i - 1)}.$$

Notation Faire intervenir l'action de GL_n sur X et noter qu'il s'agit d'un espace homogène = 5pts. Calculer correctement St_E et son cardinal = 5pts. Conclure avec les donnes formules pour $|\mathrm{GL}_n|$, $|\mathrm{GL}_\ell|$, etc. = 5pts. □

Exercice 3 (14 pts)**.** Faire les exercices suivants.

1/ (5 pts) Soit G un groupe abélien et $V \neq 0$ une représentation complexe simple de dimension finie de G. Montrer que $\dim V = 1$. (Étudier les sous-espaces propres.)

Correction. Soit $g \in G$. Pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on sait que $E(g, \lambda) := \{v \in V \ : \ gv = \lambda v\} \neq 0$. Or, si $h \in G$ et $v \in E(g, \lambda)$, il suit que $g(hv) = h(gv) = h(\lambda v) = \lambda h(v)$, et donc $h(E(g, \lambda)) \subset E(g, \lambda)$. Par conséquent, $E(g, \lambda) = V$. Donc, pour tout $g \in G$, il existe $\lambda_g \in \mathbb{C}$ tel que $gv = \lambda_g v$, i.e. $\rho(g) = \lambda_g \mathrm{id}$. Or, ceci implique que $\mathbb{C}v$ est toujours un sous-espace invariant, et donc $V = \mathbb{C}v$. □

2/ (3 pts) Donnez un contre-exemple à l'affirmation obtenue de la précédente en remplaçant "complexe" par "réelle".

Correction. Soit $G = \mathbb{Z}/4$. On considère $\overline{k} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi k/4) & \sin(2\pi k/4) \\ -\sin(2\pi k/4) & \cos(2\pi k/4) \end{pmatrix}$, qui donne une rep. irreductible de $\mathbb{Z}/4$. □

3/ (6 pts) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la représentation $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ déterminée par $\rho(k) = A^k$ est semi-simple si et seulement si A est diagonalisable (=possède une base dont chaque élément est vecteur propre).

Correction. $\Rightarrow$ On écrit $\mathbb{C}^n = \oplus U_i$ avec U_i simple. Il suit que U_i est de dimension un et $A(U_i) = U_i$. Si $\mathbb{C}u_i = U_i$, on voit que $Au_i = \lambda_i u_i$ et donc u_i est vecteur propre.

$\Leftarrow$ On suppose que $\mathbb{C}^n = \oplus U_i$ avec U_i simple. Donc $U_i = \mathbb{C}u_i$. Donc $Au_i = \lambda_i u_i$ pour un certain $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$, c'est-à-dire, u_i est vecteur propre. □

Exercice 4 (16 pts)**.** Soit G un groupe fini.

1/ (4 pts) Soit V un espace vectoriel complexe de dimension finie et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation avec caractère χ_V. Montrer que $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$ pour tout $g \in G$.

Correction. Pour chaque $\rho(g)$, on sait que $\rho(g)^n = \mathrm{id}$. Les valeurs propres de $\rho(g)$ sont ainsi des racines de l'unité. Par conséquent, $\mathrm{Tr}(g^{-1}) = \lambda_1^{-1} + \cdots + \lambda_n^{-1}$ est $\overline{\lambda}_1 + \cdots + \overline{\lambda}_n$. □

2/ On considère les deux propriété suivantes.

(a) Chaque élément de G est conjugué à son inverse.

(b) Pour chaque caractère de Frobenius χ de G et chaque $g \in G$, le nombre complexe $\chi(g)$ est en fait *réel*.

(2pts) Montrer que (a)$\Rightarrow$(b). (10pts) Ensuite, en regardant les fonctions caractéristiques des classes de conjugaison, prouver que (b)$\Rightarrow$(a).

Correction. (a)$\Rightarrow$(b). Si g et g^{-1} sont conjugués, alors $\chi(g) = \chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$. Donc $\chi(G) \subset \mathbb{R}$.

(b)$\Rightarrow$(a). On suppose que chaque caractère de G ne prend que des valeurs réels. Donc $\chi(g) = \chi(g^{-1})$ pour tout $g \in G$. Il suit que $\varphi(g) = \varphi(g^{-1})$ pour toute fonction centrale φ de G. Si C est la classe de conjugaison de g et δ_C est la fonction caractéristique de C, qui est centrale, alors $\delta_C(g) = \delta_C(g^{-1})$ et $g^{-1} \in C$.

Notation. Employer l'argument que les caractères engendrent les fonctions centrales = 7pts. Conclure = 3pts. □