Sorbonne Université
Groupes finis et leurs représentations
Janvier–Mai 2019 (4M014).

Examen du Lundi 3 Juin 2019

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– Le devoir a un total de 25 points. Les notes $\geqslant 20$ seront considérées comme 20.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations irresponsables vous font perdre la confiance du correcteur : Il faut les éviter à tout prix.
– La bonne compréhension et interprétation des questions fait partie du devoir.
– Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (5 pts) Soit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & u \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})\,;\, \alpha\beta\gamma = 1 \right\};$$

vous pouvez admettre que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$.

1. (3 pts) Exprimer G comme produit semi-direct $K \rtimes Q$, où $K \simeq \mathbb{C}$ et $Q \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. (Ici, $\mathbb{C}^*$ est considéré comme groupe via la multiplication des complexes, et $\mathbb{C}$ via l'addition.)
2. (2 pts) Le groupe G, est-il nilpotent ?

Exercice 2. (5 pts) Faire les exercices suivants.

1. (2 pts) Soit G un groupe abélien et $V \neq 0$ une représentation complexe simple de dimension finie de G. Montrer que $\dim V = 1$. (Étudier les sous-espaces propres.)
2. (1 pts) Donnez un contre-exemple à l'affirmation obtenue de la précédente en remplaçant “complexe” par “réelle”.
3. (2 pts) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la représentation $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ déterminée par $\rho(k) = A^k$ est semi-simple si et seulement si A est diagonalisable (=possède une base dont chaque élément est vecteur propre).

Exercice 3. (6 pts) Soit G un groupe fini. Dans la suite, les représentations sont complexes et de dimension finie. Soit $\{\rho_i : G \to \mathrm{GL}(V_i) \ : \ i = 1, \ldots, r\}$ une famille de représentations simples, non-isomorphes deux-à-deux et telle que chaque représentation simple est isomorphe à un membre de cette famille. De plus, on suppose $V_1 = \mathbb{1}$ et on note N_j le noyau de ρ_j.

1. (3 pts) Soit $N \lhd G$. Montrer que N est le noyau d'une représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}(E)$ de G.
2. (2 pts) Soit $N \lhd G$. Montrer qu'il existe $i_1, \ldots, i_t \in \{1, \ldots, r\}$ tels que $N = N_{i_1} \cap \cdots \cap N_{i_t}$.
3. (1pt) On désigne par χ_i le caractère de V_i. En déduire que si pour tout $g \in G \backslash \{e\}$ et tout $i \neq 1$ on a $\chi_i(g) \neq \chi_i(e)$ (dit autrement, "les caractères séparent $\{e\}$ de $G\backslash\{e\}$") alors G est un groupe simple.

Exercice 4. (9 pts) Soit $G = \mathscr{S}_4$ le groupe symétrique de 24 éléments. On note que

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{\mathrm{id}\} \\
C_2 &= \{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\} \\
C_3 &= \{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\} \\
C_4 &= \{(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432)\} \\
C_5 &= \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}
\end{aligned}$$

sont ses classes de conjugaison.

1. (1 pt) En utilisant que $[\mathscr{S}_4, \mathscr{S}_4] = \mathscr{A}_4$ (le groupe alterné), déterminer explicitement la structure du groupe $\mathrm{Hom}(\mathscr{S}_4, \mathbb{C}^*)$.
2. (3 pts) Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de l'action canonique de $\mathscr{S}_4$ et soit $F(X)$ l'espace vectoriel complexe des fonctions $X \to \mathbb{C}$ avec l'action de $\mathscr{S}_4$ définie par

   $$(g\varphi) : x \mapsto \varphi(g^{-1}x).$$

   Déterminer explicitement le caractère χ_X de $F(X)$.
3. (3 pts) Écrire χ_X comme somme de caractères de représentations simples.
4. (2 pts) À l'aide des questions précédentes, déterminer une représentation simple V de dimension trois telle que $\chi_V((12)) = -1$.