Sorbonne Université
Groupes finis et leurs représentations
Janvier–Mai 2019 (4M014).

Examen du Lundi 3 Juin 2019

Consignes : – Les documents et outils électroniques sont interdits.
– Le devoir a un total de 25 points. Les notes $\geqslant 20$ seront considérées comme 20.
– Vous devez justifier vos réponses au maximum.
– Les affirmations irresponsables vous font perdre la confiance du correcteur : Il faut les éviter à tout prix.
– La bonne compréhension et interprétation des questions fait partie du devoir.
– Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (5 pts) Soit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & u \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})\,;\, \alpha\beta\gamma = 1 \right\};$$

vous pouvez admettre que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$.

1. (3 pts) Exprimer G comme produit semi-direct $K \rtimes Q$, où $K \simeq \mathbb{C}$ et $Q \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. (Ici, $\mathbb{C}^*$ est considéré comme groupe via la multiplication des complexes, et $\mathbb{C}$ via l'addition.)

   Correction. Soit
$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} : \alpha\beta\gamma = 1 \right\}$$
   et
$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : u \in \mathbb{C} \right\}.$$
   Ils sont clairement des sous-groupes de G et, en plus,
$$(\alpha, \gamma) \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & 1/\alpha\gamma & \\ & & \gamma \end{pmatrix}, \qquad u \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & & u \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

définissent des isos $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \simeq T$ et $\mathbb{C} \simeq U$. Puis,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma u \\ 0 & 1/\alpha\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

et il suit que n'importe quel élément de G s'écrit de la forme $x \cdot y$ avec $x \in U$ et $y \in T$. En plus, $T \cap U = e$.

Comme

$$\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & u \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (\alpha/\gamma) \cdot u \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

on voit que T normalise U et il suit que G est produit semi-direct $U \rtimes_\varphi T$ avec

$$\varphi : (\mathbb{C}^*)^2 \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{C}), \quad (\alpha, \gamma) \longmapsto (u \mapsto (\alpha/\gamma) \cdot u).$$

Notation : 2 pts pour T normalise U avec calcul de l'action. 1pt pour $G = U \cdot T$. □

2. (2 pts) Le groupe G, est-il nilpotent ?

Correction. Non, il l'est pas. On cherche à montrer que pour un $t \in T$ et un certain $u \in U$, la suite $[t, u]$, $[t, [t, u]]$, etc n'arrive jamais à l'identité.

Soit maintenant $g = (0, \alpha, 1)$ et $x = (u, 1, 1)$ des éléments de $\mathbb{C} \rtimes (\mathbb{C}^*)^2$. Alors

$$[g, x] = (\alpha u - u, 1, 1).$$

Donc, la suite $[g, x]$, $[g, [g, x]]$, ... est $((\alpha - 1)u, 1, 1)$, $((\alpha - 1)^2 u, 1, 1)$, ... et n'arrive jamais à $(0, 1, 1)$. □

Exercice 2. (5 pts) Faire les exercices suivants.

1. (2 pts) Soit G un groupe abélien et $V \neq 0$ une représentation complexe simple de dimension finie de G. Montrer que $\dim V = 1$. (Étudier les sous-espaces propres.)

Correction. Soit $g \in G$. Pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on sait que $E(g, \lambda) := \{v \in V \,:\, gv = \lambda v\} \neq 0$. Or, si $h \in G$ et $v \in E(g, \lambda)$, il suit que $g(hv) = h(gv) = h(\lambda v) = \lambda h(v)$, et donc $h(E(g, \lambda)) \subset E(g, \lambda)$. Par conséquent, $E(g, \lambda) = V$. Donc, pour tout $g \in G$, il existe $\lambda_g \in \mathbb{C}$ tel que $gv = \lambda_g v$, i.e. $\rho(g) = \lambda_g \mathrm{id}$. Or, ceci implique que $\mathbb{C}v$ est toujours un sous-espace invariant, et donc $V = \mathbb{C}v$. □

2. (1 pts) Donnez un contre-exemple à l'affirmation obtenue de la précédente en remplaçant "complexe" par "réelle".

Correction. Soit $G = \mathbb{Z}/4$. On considère $\overline{k} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi k/4) & \sin(2\pi k/4) \\ -\sin(2\pi k/4) & \cos(2\pi k/4) \end{pmatrix}$, qui donne une rep. irreductible de $\mathbb{Z}/4$. $\square$

3. (2 pts) Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la représentation $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ déterminée par $\rho(k) = A^k$ est semi-simple si et seulement si A est diagonalisable (=possède une base dont chaque élément est vecteur propre).

   Correction. $\Rightarrow$ On écrit $\mathbb{C}^n = \oplus U_i$ avec U_i simple. Il suit que U_i est de dimension un et $A(U_i) = U_i$. Si $\mathbb{C}u_i = U_i$, on voit que $Au_i = \lambda_i u_i$ et donc u_i est vecteur propre.
   $\Leftarrow$ On suppose que $\mathbb{C}^n = \oplus U_i$ avec U_i simple. Donc $U_i = \mathbb{C}u_i$. Donc $Au_i = \lambda_i u_i$ pour un certain $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$, c'est-à-dire, u_i est vecteur propre. $\square$

Exercice 3. (6 pts) Soit G un groupe fini. Dans la suite, les représentations sont complexes et de dimension finie. Soit $\{\rho_i : G \to \mathrm{GL}(V_i) : i = 1, \dots, r\}$ une famille de représentations simples, non-isomorphes deux-à-deux et telle que chaque représentation simple est isomorphe à un membre de cette famille. De plus, on suppose $V_1 = \mathbb{1}$ et on note N_j le noyau de ρ_j.

1. (3 pts) Soit $N \lhd G$. Montrer que N est le noyau d'une représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}(E)$ de G.

   Correction. Soit Q le groupe quotient. On sait qu'il existe un morphisme injectif $\varphi : Q \to \mathscr{S}_n$, par le théorème de Cayley, et que $\mathscr{S}_n \leqslant \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On obtient ainsi un morphisme injectif $\varphi : Q \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Or, si $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ note la composition $\pi : G \to Q$ et $\varphi : Q \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ alors $\rho(g) = \mathrm{id}$ si et seulement si $\pi(g) = e$, c'est-à-dire, si et seulement si $g \in N$. $\square$

2. (2 pts) Soit $N \lhd G$. Montrer qu'il existe $i_1, \dots, i_t \in \{1, \dots, r\}$ tels que $N = N_{i_1} \cap \cdots \cap N_{i_t}$.

   Correction. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(E)$ telle que $N = \mathrm{Ker}(\rho)$. Soit $E \simeq V_{i_1}^{a_{i_1}} \oplus \cdots \oplus V_{i_t}^{a_t}$. Alors $\rho(g) = \mathrm{id}$ si et seulement si $\rho_{i_j}(g) = \mathrm{id}$ pour chaque i_j. $\square$

3. (1pt) On désigne par χ_i le caractère de V_i. En déduire que si pour tout $g \in G \backslash \{e\}$ et tout $i \neq 1$ on a $\chi_i(g) \neq \chi_i(e)$ (dit autrement, "les caractères séparent $\{e\}$ de $G \backslash \{e\}$") alors G est un groupe simple.

   Correction. On suppose $N \lhd G$. Alors $N = N_{i_1} \cap \cdots \cap N_{i_t}$ et on doit montrer que chaque N_j est $\{e\}$ ou G. On doit montrer ainsi que si $i \neq 1$ alors $N_i = e$. Soit $g \in \mathrm{Ker}(\rho_i)$. Alors $\chi_i(g) = \chi_i(e)$ et donc $g = e$. $\square$

Exercice 4. (9 pts) Soit $G = \mathscr{S}_4$ le groupe symétrique de 24 éléments. On note que

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\mathrm{id}\} \\ C_2 &= \{(12),(13),(14),(23),(24),(34)\} \\ C_3 &= \{(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243)\} \\ C_4 &= \{(1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432)\} \\ C_5 &= \{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\} \end{aligned}$$

sont ses classes de conjugaison.

1. (1 pt) En utilisant que $[\mathscr{S}_4, \mathscr{S}_4] = \mathscr{A}_4$ (le groupe alterné), déterminer explicitement la structure du groupe $\mathrm{Hom}(\mathscr{S}_4, \mathbb{C}^*)$.

   Correction. On sait que $\mathrm{Hom}(\mathscr{S}_4, \mathbb{C}^*) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{C}^*)$ parce que $\mathscr{S}_4/\mathscr{A}_4 \simeq \mathbb{Z}/2$. Donc, $\mathrm{Hom}(\mathscr{S}_4, \mathbb{C}^*) \to \{\pm 1\}$ définie par $\varepsilon \mapsto \varepsilon((12))$ est un isomorphisme de groupes. □

2. (3 pts) Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de l'action canonique de $\mathscr{S}_4$ et soit $F(X)$ l'espace vectoriel complexe des fonctions $X \to \mathbb{C}$ avec l'action de $\mathscr{S}_4$ définie par

   $$(g\varphi) : x \mapsto \varphi(g^{-1}x).$$

   Déterminer explicitement le caractère χ_X de $F(X)$.

   Correction. On sait que $\chi_X(g) = \#\mathrm{Fix}(g)$. Donc, $\chi_X(\mathrm{id}) = 4$, $\chi_X(12) = 2$, $\chi_X(123) = 1$, $\chi_X((12)(34)) = 0$ et $\chi_X((1234)) = 0$. □

3. (3 pts) Écrire χ_X comme somme de caractères de représentations simples.

   Correction. Soit $\mathbb{C}1$ la sous-représentation de $F(X)$ définie par les fonctions constantes. Soit U son complémentaire, dont l'existence est garantie par le théorème de Maschke. Alors on note que $\chi_U = \chi_X - 1$. Donc, $\chi_U(C_1) = 3$, $\chi_U(C_2) = 1$, $\chi_U(C_3) = 0$, $\chi_U(C_4) = -1$ et $\chi_U(C_5) = -1$. Or, on sait que U est irréductible si et seulement si $\|\chi_U\|^2 = 1$, donc il suffit de calculer :

   $$1 \cdot 9 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 24.$$

   Il suit que U est simple. □

4. (2 pts) À l'aide des questions précédentes, déterminer une représentation simple V de dimension trois telle que $\chi_V((12)) = -1$.

   Correction. On considère le produit tensoriel $L \otimes U$ où L est la représentation de dimension un déterminé par $\mathrm{sgn} : \mathscr{S}_4 \to \{\pm 1\}$. Dans ce cas, on voit que $\chi_V = \chi_U \cdot \chi_L$. Il suit que $\|\chi_V\|^2$ est simple, (soit parce que il s'agit d'un produit tensoriel par une rep. de dimension un, soit par un calcul direct de $\|\chi_V\|$) et $\chi_V((12)) = -1$ □