Sorbonne Université
Groupes finis et leurs représentations
Janvier–Mai 2019 (4M014).

Examen 2 – 29 juin 2020

Vous devez rendre vos réponses au plus tard aujourd'hui à 12h00.

Consignes

- Le travail est individuel.
- Vous pouvez utiliser vos notes de cours, les feuilles de TD et des livres.
- En rendant votre devoir, vous attestez sur l'honneur ne pas avoir consulté internet pour chercher des solutions.
- La correction fera une attention particulière à la clarté et l'efficacité de la rédaction. Les affirmations grossières et irréfléchies seront sanctionnées.
- Le devoir a un total de 23 points. Les notes $\geqslant 20$ seront notées comme 20.
- N'oubliez pas de numéroter les pages de votre travail.
- N'oubliez pas de réserver un temps pour numériser et déposer vos réponses.

Glossaire et conventions

- Les représentations sont supposées de dimension finie sur le corps en question.
- Le j-ème vecteur de la base canonique sera noté par le traditionnel e_j.

Exercice 1. On se donne un corps arbitraire $\mathbb{K}$ et un entier $n \geqslant 1$. Dans la suite, on écrit GL_n au lieu de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Soient $1 \leqslant r \leqslant n$ un entier et $1 \leqslant d_1 < \cdots < d_r = n$ une suite entière strictement croissante. Un *drapeau de nationalité* $(d_1, \ldots, d_r)$ est une suite $(F_i : i = 0, \ldots, r)$ de sous-espaces de $\mathbb{K}^n$ tels que

(i) $F_0 = \{0\}$ et $F_r = \mathbb{K}^n$.

(ii) Pour chaque $0 \leqslant i < r$, F_i est un sous-espace de F_{i+1} et

(iii) pour $i > 0$, la dimension de F_i est d_i.

L'ensemble des drapeaux de nationalité $(d_1, \ldots, d_r)$ sera noté $\mathscr{D}$.

1/ (1pt) On laisse GL_n agir sur $\mathscr{D}$ par la règle suivante : Si $(F_i) \in \mathscr{D}$ et $g \in \mathrm{GL}_n$, on définit $g * (F_i) = (g(F_i))$. Soit $(C_j) \in \mathscr{D}$ donné par $C_0 = \{0\}$ et

$$C_j = \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_{d_j}), \qquad \forall\, j \in \{1, \ldots, r\}.$$

Montrer que $\mathscr{D} = \mathrm{GL}_n * C$.

2/ (2 pts) Soient $F = (F_i) \in \mathscr{D}$ et $\mathrm{St}_F < \mathrm{GL}_n$ son stabilisateur. Déterminer un groupe G et un morphisme $\phi : \mathrm{St}_F \to G$ ayant

$$\begin{aligned} U_F &= \bigcap_{j=1}^{r} \{g \in \mathrm{St}_F \ : \ (g - \mathrm{id})(F_j) \subset F_{j-1}\} \\ &= \bigcap_{j=1}^{r} \{g \in \mathrm{St}_F \ : \ g(f) \equiv f \mod F_{j-1}, \, \forall\, f \in F_j\} \end{aligned}$$

pour noyau.

3/ (2 pts) Soit C comme dans la question 1. Montrer que St_C s'écrit comme $U_C \rtimes L_C$, où L_C est un sous-groupe de St_C qu'on déterminera. Indication : Traiter d'abord le cas particulier où la nationalité est $(2, 4)$.

4/ (3 pts) En déduire des questions précédentes que pour chaque $F \in \mathscr{D}$, on a $U_F \rtimes L_F$, où L_F est un sous-groupe de St_F *isomorphe* au groupe L_C de la question précédente.

Exercice 2. On définit les matrices complexes suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

(Ici i est une racine carrée de -1.) En désignant par I la matrice identité de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on introduit le groupe de quaternions comme étant $H = \{\pm I, \pm E_1, \pm E_2, \pm E_3\}$. Dans la suite, vous pouvez faire apple aux identités suivantes :

$$\begin{array}{lllll} E_1^2 & = & E_2^2 & = & E_3^2 \ = \ -I \\ E_1E_2 & = & -E_2E_1 & = & E_3 \\ E_2E_3 & = & -E_3E_2 & = & E_1 \\ E_3E_1 & = & -E_1E_3 & = & E_2 \end{array}$$

1/ (2pts) Soit $\sigma : H \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ le morphisme d'inclusion. La représentation σ est simple : justifier.

2/ (2pts) Déterminer explicitement quatre représentations de dimension 1 de H. Indication : Faire appel aux sous-groupes $K_j = \{\pm I, \pm E_j\}$.

3/ (2 pts) Utiliser la question précédente pour déterminer $[H, H]$ et la structure du groupe H^{ab}.

4/ (4 pts) Déterminer la table de caractères de H.

Exercice 3. (5 pts) Soient G un groupe, $\mathbb{K}$ un corps et $\{S_1, \ldots, S_r\}$ des représentations simples de G, non isomorphes deux-à-deux. Soit $V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_r$. Montrer que si $U \subset V$ est une sous-représentation, alors il existe une *unique* sous-représentation $C \subset V$ telle que $V = U \oplus C$. (Indication : Commencer en faisant l'hypothèse que C est simple.)