Sorbonne Université
Groupes finis et leurs représentations
Janvier–Mai 2019 (4M014).

Examen 2 – 29 juin 2020

Vous devez rendre vos réponses au plus tard aujourd'hui à 12h00.

Consignes

— Le travail est individuel.
— Vous pouvez utiliser vos notes de cours, les feuilles de TD et des livres.
— En rendant votre devoir, vous attestez sur l'honneur ne pas avoir consulté internet pour chercher des solutions.
— La correction fera une attention particulière à la clarté et l'efficacité de la rédaction. Les affirmations grossières et irréfléchies seront sanctionnées.
— Le devoir a un total de 23 points. Les notes $\geqslant 20$ seront notées comme 20.
— N'oubliez pas de numéroter les pages de votre travail.
— N'oubliez pas de réserver un temps pour numériser et déposer vos réponses.

Glossaire et conventions

— Les représentations sont supposées de dimension finie sur le corps en question.
— Le j-ème vecteur de la base canonique sera noté par le traditionnel e_j.

Exercice 1. On se donne un corps arbitraire $\mathbb{K}$ et un entier $n \geqslant 1$. Dans la suite, on écrit GL_n au lieu de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Soient $1 \leqslant r \leqslant n$ un entier et $1 \leqslant d_1 < \cdots < d_r = n$ une suite entière strictement croissante. Un *drapeau de nationalité* $(d_1, \ldots, d_r)$ est une suite $(F_i : i = 0, \ldots, r)$ de sous-espaces de $\mathbb{K}^n$ tels que

(i) $F_0 = \{0\}$ et $F_r = \mathbb{K}^n$.

(ii) Pour chaque $0 \leqslant i < r$, F_i est un sous-espace de F_{i+1} et

(iii) pour $i > 0$, la dimension de F_i est d_i.

L'ensemble des drapeaux de nationalité $(d_1, \ldots, d_r)$ sera noté $\mathscr{D}$.

1/ (1pt) On laisse GL_n agir sur $\mathscr{D}$ par la règle suivante : Si $(F_i) \in \mathscr{D}$ et $g \in \mathrm{GL}_n$, on définit $g * (F_i) = (g(F_i))$. Soit $(C_j) \in \mathscr{D}$ donné par $C_0 = \{0\}$ et

$$C_j = \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_{d_j}), \qquad \forall\, j \in \{1, \ldots, r\}.$$

Montrer que $\mathscr{D} = \mathrm{GL}_n * C$.

Correction. Soit (F_i) drapeau. Soit $\{f_i\}$ une base de $\mathbb{K}^n$ telle que $\{f_1, \ldots, f_{d_1}\}$ est une base de F_1, $\{f_1, \ldots, f_{d_2}\}$ est une base de F_2, etc.
Soit f la matrice dont la j-ème colonne est f_j. On déduit que $f * C = F$. $\square$

2/ (2 pts) Soient $F = (F_i) \in \mathscr{D}$ et $\mathrm{St}_F < \mathrm{GL}_n$ son stabilisateur. Déterminer un groupe G et un morphisme $\phi : \mathrm{St}_F \to G$ ayant

$$\begin{aligned} U_F &= \bigcap_{j=1}^{r} \{g \in \mathrm{St}_F \,:\, (g - \mathrm{id})(F_j) \subset F_{j-1}\} \\ &= \bigcap_{j=1}^{r} \{g \in \mathrm{St}_F \,:\, g(f) \equiv f \mod F_{j-1},\, \forall\, f \in F_j\} \end{aligned}$$

pour noyau.

Correction. Soit $g \in \mathrm{St}_F$. On définit pour chaque $j \in \{1, \ldots, r\}$ l'application linéaire $\phi_j(g)$: $F_j/F_{j-1} \to F_j/F_{j-1}$. On note que $\phi_j : \mathrm{St}_F \to \mathrm{GL}(F_j/F_{j-1})$ est morphisme. Soient

$$G = \mathrm{GL}(F_1/F_0) \times \cdots \times \mathrm{GL}(F_r/F_{r-1})$$

et

$$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r) : \mathrm{St}_F \longrightarrow G.$$

On note que $\phi(g) = (I, \ldots, I) \Leftrightarrow \phi_j(g) = \mathrm{id}$ pour tout $j \Leftrightarrow g(f) \equiv f \mod F_{j-1}$ pour tout $f \in F_j$ et tout $j \Leftrightarrow g \in U_F$.
2 pts= bon morphisme $\square$

3/ (2 pts) Soit C comme dans la question 1. Montrer que St_C s'écrit comme $U_C \rtimes L_C$, où L_C est un sous-groupe de St_C qu'on déterminera. Indication : Traiter d'abord le cas particulier où la nationalité est $(2, 4)$.

Correction. On sait déjà que U_C est distingué. On doit chercher L_C et pour cela on cherche une section de

$$\phi : \mathrm{St}_C \longrightarrow \mathrm{GL}(C_1) \times \mathrm{GL}(C_2/C_1).$$

On introduit la section

$$s : \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2 \longrightarrow \mathrm{St}_C, \quad (g,h) \longmapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}.$$

Le cas général se fait de façon analogue : on introduit la section

$$s : \mathrm{GL}_{d_1} \times \mathrm{GL}_{d_2-d_1} \cdots \times \mathrm{GL}_{d_r-d_{r-1}} \longrightarrow \mathrm{St}_C$$

$$(g_1, \dots, g_r) \longmapsto \begin{pmatrix} g_1 & & \\ & \ddots & \\ & & g_r \end{pmatrix}$$

2pts = Idée correcte pour section. □

4/ (3 pts) En déduire des questions précédentes que pour chaque $F \in \mathscr{D}$, on a $U_F \rtimes L_F$, où L_F est un sous-groupe de St_F *isomorphe* au groupe L_C de la question précédente.

Correction. Soit $g \in \mathrm{GL}_n$ tel que $gC = F$. On sait que $g\mathrm{St}_C g^{-1} = \mathrm{St}_F$. Comme $\mathrm{St}_C = U_C \rtimes L_C$, on voit que $\mathrm{St}_F = gU_Cg^{-1} \rtimes gL_Cg^{-1}$. En effet, chaque $gxg^{-1} \in g\mathrm{St}_Cg^{-1}$ s'écrit comme $gug^{-1} \cdot g\ell g^{-1}$ pourvu que $x = u\ell$, l'intersection $gU_Cg^{-1} \cap gL_Cg^{-1} = \{e\}$ et gU_Cg^{-1} est distingué.

On choisit $L_F = gL_Cg^{-1}$. Ensuite, on note que gU_Cg^{-1} est en fait U_F : Soit $x \in \mathrm{St}_C$. Alors $gxg^{-1} \in U_F \Leftrightarrow gxg^{-1}(gc) = gc \mod gC_{j-1}$ pour tout $c \in C_j$ et tout $j \Leftrightarrow gx(c) \equiv g(c) \mod gC_{j-1}$ pour tout $c \in C_j$ et tout $j \Leftrightarrow x(c) = c \mod C_{j-1}$ pour tout $c \in C_j$ et tout $j \Leftrightarrow x \in U_C$. Donc, $\mathrm{St}_F = U_F \rtimes gL_Cg^{-1}$.

1pt = stabilisateurs conjugués. 1pt = $U_F = gU_Cg^{-1}$. 1pt=produit semi-direct. □

Exercice 2. On définit les matrices complexes suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

(Ici i est une racine carrée de -1.) En désignant par I la matrice identité de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on introduit le groupe de quaternions comme étant $H = \{\pm I, \pm E_1, \pm E_2, \pm E_3\}$. Dans la suite, vous pouvez faire apple aux identités suivantes :

$$\begin{array}{lllllll} E_1^2 & = & E_2^2 & = & E_3^2 & = & -I \\ E_1E_2 & = & -E_2E_1 & = & E_3 & & \\ E_2E_3 & = & -E_3E_2 & = & E_1 & & \\ E_3E_1 & = & -E_1E_3 & = & E_2 & & \end{array}$$

1/ (2pts) Soit $\sigma : H \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ le morphisme d'inclusion. La représentation σ est simple : justifier.

Correction. Soit $L \subset \mathbb{C}^2$ une droite invariante. Alors L est droite propre de E_1 et donc $L = \mathbb{C}e_1$ ou $\mathbb{C}e_2$. Or, ni $\mathbb{C}e_1$ ni $\mathbb{C}e_2$ est droite propre de E_2. □

2/ (2pts) Déterminer explicitement quatre représentations de dimension 1 de H. Indication : Faire appel aux sous-groupes $K_j = \{\pm I, \pm E_j\}$.

Correction. On note que $H/K_j \simeq \mathbb{Z}/2$. Soit alors $\theta_j : H \to \mathbb{C}^*$ le morphisme définit par $\theta_j(x) = 1$ si $x \in K_j$ et $\theta_j(x) = -1$ si $x \notin K_j$. Nous avons ainsi trois reps de dimension 1 distinctes. Avec la rep triviale, on arrive à 4 caractères. □

3/ (2 pts) Utiliser la question précédente pour déterminer $[H, H]$ et la structure du groupe H^{ab}.

Correction. Les éléments $\pm E_1, \pm E_2$ et $\pm E_3$ n'appartiennent pas à $[H, H]$. En effet, si $E_j \in [H, H]$, alors $\theta_k(E_j) = 1$ pour chaque k. Or, mais si $k \neq j$, on voit que $\theta_k(E_j) = -1$. De même, si $-E_j \in [H, H]$ alors $\theta_k(-E_j) = 1$ et ceci est faux si $k \neq j$ parce que $-E_j \notin \{\pm I, \pm E_k\}$. Donc, $[H, H]$ est soit $\{I\}$, soit $\{\pm I\}$. Mais $[E_1, E_2] = E_1E_2(-E_1)(-E_2) = -I$ et donc $-I \in [H, H]$. On déduit que H^{ab} est d'ordre 4. Il est engendré par des éléments d'ordre 2, donc il s'agit de $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

□

4/ (4 pts) Déterminer la table de caractères de H.

Correction. On connait déjà 4 reps simples de dim 1 de H. Soient $S_1, \ldots, S_r$ d'autres reps simples de dimension > 1. Comme $8 = 4 + \sum_{j=1}^{r} (\dim S_j)^2$, on voit que $r = 1$ et $\dim S_1 = 2$. On désigne par σ le caractère de S_1.

En conclusion, H *possède 5 classes de conjugaison.* La première est $\{I\}$. Comme $-I$ est dans le centre, $\{-I\}$ est une autre classe. Ensuite, $E_1E_2(-E_1) = -E_2$ et $\{\pm E_2\}$ est dans une même classe. De même, $E_1E_3(-E_1) = -E_3$ et $\{\pm E_3\}$ est dans une même classe. Finalement, $E_3E_1(-E_3) = -E_1$ et $\{\pm E_1\}$ est dans une même classe. Il suit que $\{\pm E_1\}$ $\{\pm E_2\}$ et $\{\pm E_3\}$, $\{I\}$ et $\{-I\}$ sont les classes. Les relations d'orthogonalité nous permettent de trouver la table :

	I	$-I$	E_1	E_2	E_3
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
θ_1	1	1	1	-1	-1
θ_2	1	1	-1	1	-1
θ_3	1	1	-1	-1	1
σ	2	-2	0	0	0

1pt = formule $8 = 1^2 + \ldots$ *1 pt = classes de conj. 2pts = bonne table* □

Exercice 3. (5 pts) Soient G un groupe, $\mathbb{K}$ un corps et $\{S_1, \ldots, S_r\}$ des représentations simples de G, non isomorphes deux-à-deux. Soit $V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_r$. Montrer que si $U \subset V$ est une sous-représentation, alors il existe une *unique* sous-représentation $C \subset V$ telle que $V = U \oplus C$. (Indication : Commencer en faisant l'hypothèse que C est simple.)

Correction. Soit $C' \subset V$ un complémentaire invariant. On doit montrer que $C = C'$. Mais attention ! Il ne s'agit pas de montrer que $C \simeq C'$: ceci est toujours vrai parce que $C \simeq V/U \simeq C'$. Comme $\dim C = \dim C'$, il suffit de montrer que $C \subset C'$. On note que $C \simeq C'$ car $C \simeq V/U \simeq C'$. On montre que chaque sous-rep simple $S \subset C$ est contenue dans C'. Puisque C est semi-simple, ceci montrera que $C \subset C'$. Soit ainsi $S \subset C$ simple. Si $S \cap C' \neq 0$ alors $S \cap C' = S$ et $S \subset C'$. Sinon, $S \cap C' = 0$. Puisque $C \simeq C'$, il existe une sous-rep $S' \subset C'$ telle que $S' \simeq S$. Clairement, $S \cap S' = 0$. On considère ainsi le morphisme naturel $S \oplus S' \to V$ et on voit que $S \oplus S$ est isomorphe à une sous-rep de V, ce qui contredit l'hypothèse de la multiplicité. $\square$